Mesure et intégration, quelques exercices

1 Mesurabilité

Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}$. On suppose que Y est mesurable par rapport à la tribu $X^{-1}(\mathcal{B})$. Montrez qu'il existe $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $Y = \Phi(X)$.
(On commencera par le cas où Y est une fonction étagée,
puis on utilisera l'écriture dyadique de $Y = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_m(Y)2^{-m}$ où $\delta_m \in \{0, 1\}$.)

2 Intégration

1. Soit $(A_n)_n$ une suite d'ensembles mesurables de $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ tels que $\sum_n \mu(A_n) < \infty$. Montrez que pour presque tout ω de Ω, ω appartient a au plus un nombre fini de tels ensembles.
(Etudier la fonction $g = \sum \chi_{A_n}$ où χ_A désigne la fonction indicatrice de A.)
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que mesure$(A) < \delta$ implique $\int_A f(x)dx < \varepsilon$.
(Faire le cas où f est bornée puis utiliser $A_n := \{f > n\}$.)
3. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
Si F est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ montrez que f est nulle presque partout.
4. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée, $m := -\inf f$, $M = \sup f$.
Si $\int_0^1 f(x)dx = 0$, montrez que $\int_0^1 f^2(x)dx \leq mM$.
(Traiter le cas où f ne prend que deux valeurs ou deux valeurs et la valeur zéro, puis géneraliser aux sommes bien choisies de telles fonctions.)

3 Fubini et changement de variables

1. Soit $\|.\|$ une norme de $\Omega := \mathbb{R}^d$.
Montrez que $\int_\Omega \frac{dX}{1 + \|X\|^\alpha} < \infty$ si et seulement si $\alpha > d$.
(On traitera d'abord le cas $d = 2$ avec Fubini ou en passant en coordonnées polaires.)
2. Soient $F : \Omega \to \Omega$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1$ et nulle en dehors d'un compact, $A \in GL_d(\mathbb{R})$, $Y = AX$, $|\det A|\phi(Y) = \varphi(X)$. Explicitez la fonction $Y \mapsto G(Y)$ telle que :

$$\int_\Omega \nabla_X \varphi(X).F(AX)dX = \int_\Omega \nabla_Y \phi(Y).G(Y)dY.$$