Fonctions croissantes, fonctions convexes.

Ex. 1 : Fonctions croissantes. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non trivial.

1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante.
a) Montrer que si $a \in \overset{\circ}{I}$, $\lim_{x\to a, x>a} f(x)$ et $\lim_{x\to a, x<a} f(x)$ existent. En déduire que f est réglée. Montrer aussi que f est continue ssi $f(I)$ est un intervalle.
b) Montrer que $\{x \in I, f(x^+) \neq f(x^-)\}$ est au plus d'enombrable.

2) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. Montrer que f admet un point fixe (utiliser l'ensemble $E = \{t \in [0,1], f(t) \geq t\}$).

3) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone, puis que $f : I \to f(I)$ est un homéomorphisme.

On rappelle que si E est un convexe d'un espace affine, et $f : E \to \mathbb{R}$, alors on dit que f est convexe si $\forall x_0,\ x_1 \in E$, $\forall t \in [0,1]$,

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

On dit que f est strictement convexe si, en outre, l'égalité n'a lieu que si $x_0 = x_1$ ou $t \in \{0,1\}$.

Ex. 2 : Fonctions convexes. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non trivial.

1) *a)* Pour $x \in I$, on définit $\Phi_x : I\backslash\{x\} \to \mathbb{R}$ par $\Phi_x(t) = \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$. Montrer que f est (strictement) convexe ssi pour tout $x \in I$, Φ_x est (strictement) croissante. En déduire que si f est convexe, f est dérivable à gauche et à droite en tout $x \in \overset{\circ}{I}$ et que si $x,\ y \in \overset{\circ}{I}$, $x < y$, on a

$$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y).$$

b) En déduire que f est continue dans $\overset{\circ}{I}$, et même localement lipschitzienne. Montrer sur des exemples que ceci n'est plus nécessairement vrai aux bornes de I.
c) Démontrer que la fonction $f'_d : \overset{\circ}{I} \to \mathbb{R}$ est continue à droite.

2) *Caractérisation de la convexité par dérivation.* Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
a) Si f est dérivable, montrer que f est (strictement) convexe ssi f' est (strictement) croissante. Démontrer que dans ce cas, f est en fait de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Justifier que si I est ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable à droite en tout point, alors f est convexe ssi si $\forall x \in I$, f est au-dessus de sa tangente à droite en x (*i.e.* pour tout $x,\ y \in I$, $f(y) \geq f(x) + f'_d(x)(y-x)$).
c) Si f est deux fois dérivable, montrer que f est convexe ssi $f'' \geq 0$.

3) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, et $f : I \to \mathbb{R}$.
a) Montrer que si f est continue, f est convexe ssi pour $x,\ y \in I$, $f(\frac{1}{2}(x+y)) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$. On montrera que $f(\frac{1}{2^n}(kx+(2^n-k)y) \leq \frac{1}{2^n}[kf(x)+(2^n-k)f(y)]$ et on utilisera la densité de $\{\frac{k}{2^n},\ 0 \leq k \leq 2^n\}$ dans $[0,1]$.

b) Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sont convexes, avec φ croissante et $f(I) \subset J$, alors $\varphi \circ f$ est convexe. En déduire que si $f > 0$ sur I et si $\ln(f)$ est convexe, alors f est convexe. A l'aide de $f(x) = \frac{1}{x}$, montrer que la réciproque est fausse.

4) *Variation des fonctions convexes.* Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que s'il existe $a, b \in I$, $a < b$ tels que $f(a) = f(b)$, alors $f_{|[a,b]}$ a un minimum
5) Soit $(f_k)_{k\in K}$ une famille de fonctions convexes sur I, telle que $f(x) = \sup_{k\in K} f_k(x) < \infty$. Montrer que f est convexe.

Ex. 2 : Inégalité de Jensen. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $\varphi : \Omega \to I$ dans $L^1(\Omega, \mu)$, avec $\mu(\Omega) = 1$. On souhaite montrer l'inégalité de Jensen :

$$f\left(\int_\Omega \varphi \, d\mu \right) \le \int_\Omega f \circ \varphi \, d\mu.$$

1) En utilisant des sommes de Riemann, montrer l'inégalité lorsque $\Omega = [0, 1]$ avec μ =Lebesgue et $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1])$.
2) En utilisant l'Ex. 2 2) b), démontrer l'inégalité.

Références :

- X. Gourdon, *Les maths en tête (Analyse).* Partie II, Section 3.
- Arnaudiès - Fraysse, *Cours de Mathématiques - Analyse.* Chap. IV.2 et V.5.