Université de Nice — Année 2006-2007
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Panorama sur les formes bilinéaires et les formes quadratiques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, de caractéristique différente de 2. Sauf mention du contraire, les formes bilinéaires et quadratiques considérées ont pour espace de départ E. On ne traite pas ici du contexte euclidien, ni des théorèmes de coréduction.

1. Formes bilinéaires

Définition 1 *Une application $\phi\colon E\times E\to K$ est dite* bilinéaire *si $i_\phi\colon x\mapsto(y\mapsto\phi(x,y))$ est à valeurs dans E^* et linéaire sur E, ce qui équivaut à ce que $j_\phi\colon x\mapsto(y\mapsto\phi(y,x))$ le soit.*

On dit que ϕ est symétrique *(resp.* antisymétrique*, ou* alternée*) si $i_\phi=j_\phi$ (resp. $i_\phi=-j_\phi$). On dit qu'elle est* non-dégénérée *si i_ϕ est bijective, cela équivaut à ce que j_ϕ le soit. On appelle* rang *(resp.* noyau*) de ϕ celui de i_ϕ, qui est égal à celui de j_ϕ (resp. si ϕ est symétrique ou antisymétrique).*

La matrice d'une forme bilinéaire sur une base (e_i) de E est celle de j_ϕ dans les base (e_i) et (e_i^*). Elle est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si ϕ l'est.

Lemme 2 *L'espace des formes bilinéaires est somme directe de celui des formes symétriques et de celui des formes antisymétriques.*

Définition 3 *Si ϕ est symétrique ou antisymétrique, alors on définit l'orthogonal d'une partie A de E comme étant l'orthogonal de $i_\phi(A)=j_\phi(A)\subset E^*$. Une base est dite* orthogonale *si deux vecteurs distincts la composant sont orthogonaux.*

Lemme 4 *Si ϕ est non-dégénérée, l'orthogonalité définit une involution décroissante de l'ensemble des sous-espaces de dimension r de E dans celui des sous-espaces de dimension $\dim E-r$.*

Lemme 5 *Toute forme bilinéaire ϕ symétrique ou antisymétrique induit sur $E/\ker\phi$ une forme bilinéaire non-dégénérée.*

2. Réduction des formes bilinéaires symétriques et antisymétriques

Théorème 6 *Toute forme bilinéaire symétrique admet une base orthogonale.*

Corollaire 7 *Si tout élément de K admet une racine carrée dans K (en particulier si $K=\mathbb{C}$), alors toute forme bilinéaire symétrique et non-dégénérée admet une base orthonormale.*

Corollaire 8 *Si $K=\mathbb{R}$, alors toute forme bilinéaire symétrique ϕ admet pour matrice sur une base adaptée une matrice diagonale dont les coefficients valent 1, -1 ou 0. On appelle* signature *de ϕ le couple (r,s), où r (resp. s) est le nombre de coefficients diagonaux égaux à 1 (resp. -1), elle est indépendante de la base choisie.*

Théorème 9 *Soit ϕ une forme quadratique antisymétrique, alors il existe un entier $p \leq \dim E/2$ et une base $(e_i)_{1\leq i\leq \dim E}$ de E telle que $\phi(e_i, e_{p+j}) = \delta_{i,j}$ si $1 \leq i, j \leq p$ et telle que $(e_i)_{i\geq 2p+1}$ est une base de* $\ker \phi$.

Corollaire 10 *S'il existe une forme quadratique antisymétrique non-dégénérée sur E alors* $\dim E$ *est paire.*

3. Formes quadratiques et réduction des formes quadratiques

Définition 11 *On appelle* forme quadratique *toute fonction q de E dans K telle qu'il existe une forme bilinéaire ϕ vérifiant $q(x) = \phi(x, x)$ pour tout $x \in E$. On dit alors que q est* attachée *à ϕ. La forme quadratique attachée à une forme antisymétrique est nulle.*

On appelle forme polaire *de la forme quadratique q l'unique forme bilinéaire symétrique ϕ à laquelle q est attachée. On dit que q est* non-dégénérée *si ϕ l'est ; on appelle* noyau *(resp.* rang*) de q celui de ϕ ; on dit que deux vecteurs sont* orthogonaux *pour q s'il le sont pour ϕ ; si $K = \mathbb{R}$, on appelle* signature *de q celle de ϕ.*

On appelle vecteur isotrope *de la forme quadratique q tout vecteur sur lequel q s'annule. On appelle* cône isotrope *l'ensemble des vecteurs isotropes. On dit que q est* définie *si son cône isotrope est nul. On dit d'un sous-espace F de E qu'il est* totalement isotrope *si la restriction de q à F est nulle.*

Lemme 12 *Si q est une forme quadratique définie et non-dégénérée, alors elle vérifie $F^{\perp} \oplus F = E$ pour tout sous-espace F de E.*

Théorème 13 *Toute forme quadratique de rang p est une combinaison linéaire de p carrés de formes linéaire linéairement indépendantes.*

Corollaire 14 *Si tout élément de K admet une racine carrée dans K (en particulier si $K = \mathbb{C}$), alors toute forme quadratique de rang p est une somme de carrés de p formes linéaire linéairement indépendantes.*

Corollaire 15 *Si $K = \mathbb{R}$, alors toute forme quadratique de rang p est une combinaison linéaire, de coefficients dans ± 1, de p carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. La signature (r, s) de q est telle que r (resp. s) est le nombre de carrés affectés de coefficients 1 (resp. -1). En particulier, une telle forme est définie si elle est d'une part non-dégénérée et d'autre part soit positive, soit négative. Elle admet une base orthonormale si et seulement si elle est définie positive.*

4. Isotropie

Théorème 16 *Toute forme quadratique admet un sous-espace totalement isotrope maximal et tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux ont même dimension.*

Corollaire 17 *Soit q une forme quadratique non-dégénérée. Alors E est la somme directe de trois sous-espaces E_1, E_2 et E_3, où E_1 et E_2 sont totalement isotropes, $i_\phi \colon E_1 \to E_2^*$ est bijective, E_1 et E_2 sont orthogonaux à E_3 et q restreinte à E_3 est définie.*

Corollaire 18 *Si $K = \mathbb{R}$, et si q est non-dégénérée, la dimension des sous-espaces totalement isotrope maximaux pour q est* $\min\{r, s\}$*, où (r, s) est la signature de q. Si $K = \mathbb{C}$, la dimension des sous-espaces totalement isotropes est la partie entière de* $\dim E/2$.