TD sur les polynômes symétriques

Rappel : Soit K un corps commutatif. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur l'anneau des polynômes $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$: pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$, on pose

$$ {}^{\sigma}\mathrm{P}(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_{\sigma(1)},\ldots,\mathrm{X}_{\sigma(n)}) \ . $$

On dit qu'un polynôme est symétrique si ${}^{\sigma}\mathrm{P} = \mathrm{P}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Les *polynômes symétriques élémentaires* sont les polynômes

$$ s_p(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \mathrm{X}_{i_1}\ldots\mathrm{X}_{i_p} \quad \text{pour } 1 \le p \le n \ . $$

Le théorème des polynômes symétriques affirme que tout polynôme symétrique de $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$ s'écrit comme polynôme en $s_1,\ldots,s_n$.

1) Exprimer en fonction des polynômes symétriques élémentaires les polynômes $\mathrm{X}^2(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})+\mathrm{Y}^2(\mathrm{Z}+\mathrm{X})+\mathrm{Z}^2(\mathrm{X}+\mathrm{Y})$, puis $\mathrm{X}^3(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})+\mathrm{Y}^3(\mathrm{Z}+\mathrm{X})+\mathrm{Z}^3(\mathrm{X}+\mathrm{Y})$.

2) Soit $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ un élément du corps des fractions rationnelles $\mathrm{K}(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose ${}^{\sigma}\mathrm{F} := \frac{{}^{\sigma}\mathrm{P}}{{}^{\sigma}\mathrm{Q}}$. On dit que F est symétrique si ${}^{\sigma}\mathrm{F} = \mathrm{F}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

a) Montrer qu'une fraction rationnelle symétrique peut s'écrire $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, où P et Q sont des polynômes symétriques.

b) Montrer que l'homomorphisme $\mathrm{K}(\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n) \to \mathrm{K}(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ qui envoie T_i sur $s_i(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ identifie $\mathrm{K}(\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n)$ au sous-corps des fractions rationnelles symétriques de $\mathrm{K}(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$.

3) a) Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Quels que soient $i<j$, P change de signe lorsqu'on échange X_i et X_j ;

(ii) ${}^{\sigma}\mathrm{P} = \varepsilon(\sigma)\mathrm{P}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que le polynôme P est *antisymétrique.*

b) Montrer que le polynôme $\Delta = \prod_{i<j}(\mathrm{X}_i - \mathrm{X}_j)$ est antisymétrique.

(Remarque: ce fait permet une définition commode de la signature.)

c) Montrer que tout polynôme antisymétrique est le produit de Δ et d'un polynôme symétrique.

4) Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$ un polynôme tel que ${}^{\sigma}\mathrm{P} = \mathrm{P}$ pour toute permutation *paire* σ .

a) Montrer que l'application $\sigma \mapsto {}^{\sigma}\mathrm{P}$ ne prend que deux valeurs P et Q lorsque σ parcourt $\mathfrak{S}_n$.

b) En considérant $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ et $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$, montrer qu'il existe des polynômes symétriques A et B , uniquement déterminés, tels que $\mathrm{P} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\Delta$ (exerc. 3).

c) Décrire (comme quotient d'un anneau de polynômes) le sous-anneau de $K[X_1, \ldots, X_n]$ formé des polynômes invariants sous le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$.

5) Soit $A = \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$; pour tout $k \geq 0$ on pose $p_k = X_1^k + \ldots + X_n^k$ ("sommes de Newton"). Le but de l'exercice est d'exprimer les p_k en fonction des s_i .

On considère le polynôme $P(T) = \prod_{i=1}^{n}(1 - TX_i) = 1 - s_1 T + \ldots + (-1)^n s_n T^n \in A[T]$.

a) Démontrer la formule

$$\frac{-TP'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{TX_i}{1 - TX_i} = \sum_{i \geq 1} p_k T^k$$

(le membre de droite est une *série formelle* à coefficients dans l'anneau A).

b) En déduire (par multiplication) les égalités

$$p_k - s_1 p_{k-1} + \ldots (-1)^{k-1} s_{k-1} p_1 + (-1)^k k s_k = 0$$

avec la convention $s_p = 0$ pour $p > n$.

c) Calculer $p_1, p_2, p_3, \ldots$ en fonction des s_i .

d) Inversement, montrer que s_k est égal à un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Q}$ en $p_1, \ldots, p_k$.