Séries de fonctions

Exercice 1 Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On définit

$$\exp M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}, \ \log(Id+M) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{M^k}{k}.$$

1) Montrer que ces séries sont normalement convergentes, dans tous les cas pour $\exp M$ et pour $\|M\|$ assez petit pour $\log M$. On pourra considérer M comme une application sur $\mathbb{R}^n$.
2) Prouver que, pour $\|M\|$ assez petite

$$\exp\log(Id+M) = Id+M, \quad \log\exp M = M.$$

3) Détailler dans quels cas la série $\log M$ est convergente, uniformément convergente, normalement convergente.

Exercice 2 Soit une série trigonométrique

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}.$$

1) Montrer que l'on a convergence normale pour la norme du sup si

$$\sum |a_n| < \infty.$$

2) Prouver que f est dérivable en tous points si

$$\sum |n\, a_n| < \infty.$$

3) Soit $a_n = |n|^{-2/3}$ si $n = k^2$ et $a_n = 0$ sinon. Montrer que la fonction f correspondante est continue mais pas dérivable.

Correction de la question 2 de l'exercice 1 Pour K et L grands calculons

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=1}^{L} \frac{M^l}{l} \right)^k = \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{kL} a_i^k M^i,$$

avec pour $i \leq L$

$$a_i^k = \sum_{n_1 \ldots n_i,\ tq\ \sum_{l=1}^{i} n_l = k,\ \sum_{l=1}^{i} l\, n_l = i} \Pi_{l=1}^{i} \frac{(-1)^{(l-1)n_l}}{l^{n_l}}\, C_{k-n_1-\ldots n_{l-1}}^{n_l},$$

et pour $i > L$

$$a_i^k = \sum_{n_1 \ldots n_L,\ tq\ \sum_{l=1}^{L} n_l = k,\ \sum_{l=1}^{L} l\, n_l = i} \Pi_{l=1}^{L} \frac{(-1)^{(l-1)n_l}}{l^{n_l}}\, C_{k-n_1-\ldots n_{l-1}}^{n_l}.$$

En échangeant l'ordre des deux sommes, on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=1}^{L} \frac{M^l}{l} \right)^k = \sum_{i=1}^{L} b_i^{K,L} M^i + \sum_{i=L+1}^{KL} c_i^{K,L} M^i,$$

avec la formule générale pour les coefficients

$$b_i^{K,L} = \sum_{k=i/L}^{K} \frac{a_i^k}{k!}, \quad i \leq L,$$

et

$$c_i^{K,L} = \sum_{k=i/L}^{K} a_i^k k!, \quad i > L.$$

Attention comme la formule pour les a_i^k dépend de si $i \leq L$ ou $i > L$, on a bien en fait deux formules différentes pour $b_i^{K,L}$ et $c_i^{K,L}$. On fera remarquer que les indices K et L pour ces coefficients sont explicités afin que le passage aux limites $K, L \to \infty$ soit plus clair.
Commençons par estimer ces coefficients. On a tout d'abord très simplement, en utilisant les formules pour les C_n^p

$$|a_i^k| \leq \sum_{n_1 \ldots n_i,\ tq\ \sum_{l=1}^{i} n_l = k,\ \sum_{l=1}^{i} l\, n_l = i} \Pi_{l=1}^{i} \frac{1}{l^{n_l}} \frac{(k-n_1-\ldots n_{l-1})!}{n_l!\,(k-n_1-\ldots n_l)!}.$$

Il y a évidemment des simplifications dans les facteurs ce qui fait qu'on obtient

$$|a_i^k| \leq \sum_{n_1 \ldots n_i,\ tq\ \sum_{l=1}^{i} n_l = k,\ \sum_{l=1}^{i} l\, n_l = i} \frac{k!}{n_1! \ldots n_i!}\, \Pi_{l=1}^{i} \frac{1}{l^{n_l}} \leq \sum_{n_1 \ldots n_i = 0 \ldots \infty} \frac{k!}{n_1! \ldots n_i!}\, \Pi_{l=1}^{i} \frac{1}{l^{n_l}}.$$

Or on peut majorer par exemple par

$$\sum_{n_1\ldots n_i=0\ldots\infty} \frac{1}{n_1!\ldots n_i!}\,\Pi_{l=1}^i \frac{1}{l^{n_l}} = \Pi_{l=1}^i \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{l^n\, n!} \le \Pi_{l=1}^i e^{1/l} \le e^{\sum_{l=1}^i 1/l} \le e^{\ln(i+1)} = i+1.$$

On a donc (à la fois pour $i \le L$ et $i > L$) que

$$|a_i^k| \le (i+1)\, k!,$$

et ainsi

$$|b_i^{K,L}| \le (i+1)\, K, \quad |c_i^{K,L}| \le (i+1)\, K.$$

Remarquons alors que pour M de norme inférieure à 1, on a que

$$\sum_{i=L+1}^{KL} c_i^{K,L} M^i \longrightarrow 0,$$

lorsque $L \to \infty$ avec K fixé pour l'instant. D'autre part, on a de même que

$$\sum_{i=1}^{L} b_i^{K,L} M^i \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} b_i^K M^i,$$

avec

$$b_i^K = \sum_{k=0}^{K} \frac{a_i^k}{k!}.$$

Remarquons que $a_i^0 = 0$ si $i > 0$, donc sauf pour $i = 0$, la somme précédente démarre en fait à 1 (c'est juste une question de convention). La formule pour les a_i^k est maintenant uniquement ($L = \infty$)

$$a_i^k = \sum_{n_1\ldots n_i,\ tq\ \sum_{l=1}^i n_l = k,\ \sum_{l=1}^i l\, n_l = i} \Pi_{l=1}^i \frac{(-1)^{(l-1)n_l}}{l^{n_l}}\, C_{k-n_1-\ldots n_{l-1}}^{n_l},$$

et la série $\sum b_i^K M^i$ est normalement convergente puisque

$$|b_i^K| \le (i+1)\, K.$$

On obtient donc comme étape intermédiaire le résultat

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{(\log(Id+M))^k}{k!} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^K M^i.$$

L'étape suivante est de calculer b_i^K pour $i \le K$. Pour cela, on remarque que a_i^k est nul si $k > i$ puisqu'on ne peut avoir $\sum n_l > \sum l\, n_l$. Donc

$$b_i^K = b_i = \sum_{k=0}^{i} \frac{a_i^k}{k!}, \quad \textit{pour } i \le K,$$

et ainsi

$$|b_i^K| \leq i(i+1), \quad pour\ i \leq K.$$

D'autre part cette dernière inégalité est trivialement vraie pour $i > K$ d'où

$$|b_i^K| \leq i(i+1), \quad pour\ tout\ i.$$

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{(\log(Id+M))^k}{k!} = \sum_{i=1}^{K} b_i M^i + \sum_{i=K+1}^{\infty} b_i^K M^i.$$

Or d'après les majorations des b_i et b_i^K, on voit que la série $\sum b_i M^i$ est normalement convergente et que le terme de reste $\sum_{i=K+1}^{\infty} b_i^K M^i$ converge vers 0 quand K tend vers l'infini.
Comme on a déjà obtenu la convergence de l'exponentielle, on en déduit que

$$\exp\ \log(Id+M) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i M^i.$$

Il ne reste qu'à identifier les b_i. Prenons pour cela $M = t\,Id$ avec t un réel strictement inérieur à 1. Dans ce cas $\log(Id + tId)$ vaut simplement $\log(1+t)\,Id$ grâce au développement connu du logarithme dans $\mathbb{R}$. On aurait alors

$$e^{\log(1+t)}\,Id = \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i t^i\right)\,Id,$$

et par unicité du développement en série entière, on en déduit immédiatement que

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_i = 0\ si\ i > 1.$$

En réinjectant cela dans la formule avec un M général, on a enfin

$$\exp\log(Id+M) = Id + M.$$