Université de Nice — Année 2006-2007
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Exercices d'arithmétique

1. Soit $p \geq 2$ un entier. Montrer que si a et b (resp. c et d) sont des entiers congrus modulo p, alors $a+c$ et $b+d$ (resp. ac et bd) le sont aussi. Que dire de a^c et b^d ?

2. Montrer[1] que pour tout nombre premier p et tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq p$, C_p^k est congru à 0 modulo p.

3. Montrer que si a et n sont des entiers naturels, avec n impair, alors $a+1$ divise a^n+1.

4. Soit n un entier naturel. Montrer que si 2^n+1 est premier alors n est une puissance de 2 (on utilisera l'exercice 3)[2].

5. Montrer pour tout nombre premier p et tout couple d'entiers naturels (m,n), p^n-1 divise p^m-1 si et seulement si n divise m (on pourra écrire la division euclidienne de m par n).

6. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que $2^{2^n}+1$ divise $2^{2^m}+1$ si et seulement si $n=m$ (voir l'indication de l'exercice 5).

7. Soit $a \geq 2$ et $n \geq 1$ deux entiers naturels. Montrer que si a^n+1 est premier, alors a pair et n est une puissance de 2.

8. Quel est le critère de divisibilité d'un entier écrit en numération décimale par 3 ? Démontrer sa validité.

9. Calculer la congruence de 10^3 modulo 7 ; en déduire un critère de divisibilité par 7.

10. Trouver tous les entiers n tels que $2^{2n}+2^n+1$ soit divisible par 7.

11. Soit a, b, c trois entiers. Montrer que si a est congru à b modulo 3, alors a^3 est congru à b^3 modulo 9. En déduire que si 9 divise $a^3+b^3+c^3$, alors 3 divise a, b ou c.

---

[1] Ce fait implique que l'élévation à la puissance p définit un endomorphisme d'anneaux de toute $\mathbb{F}_p$-algèbre commutative, cf. leçon 112.

[2] Ces nombres sont dits de Fermat ; cet exercice est une étape importante du critère de constructibilité à la règle et au compas des polygônes réguliers, leçon 143.