Université de Nice — Année 2006-2007
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Travaux dirigés : Équation diophantienne de degré 1 à deux inconnues

Notation : On désigne par a, b, c des entiers relatifs fixés. Les lettres x et y désignent inconnues à valeurs dans les entiers relatifs.

Un exemple.

1. Résoudre l'équation $2x + 3y = 0$ en x et y.

2. Trouver une solution particulière de l'équation $2x + 3y = 1$. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

3. Résoudre l'équation $2x + 3y = 12$.

Le cas général.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, et faisant intervenir le pgcd d de a et b, pour que l'équation $ax + by = c$ admette des solutions.

5. (cas $c = 0$) Résoudre l'équation $ax + by = 0$ lorsque a et b sont premiers entre eux (i.e. d=1), puis dans le cas général.

6. (Cas $c = d$) Montrer que l'ensemble des solutions de $ax+by = d$ n'est pas vide (cf. exercice 11 pour un calcul effectif). En fonction de l'un de ses éléments (x_0, y_0), déterminer cet ensemble à l'aide de la question 5.

7. (cas général) Sous la condition établie en 4, résoudre l'équation $ax + by = c$ en fonction d'une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation $ax + by = d$.

8. Récapituler la résolution de l'équation $ax + by = c$.

Résolution effective de l'équation de Bézout

9. Rappeler l'algorithme d'Euclide permettant de trouver le pgcd de deux entiers a et b lorsque $0 < b < a$ (on définira une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ d'entiers dont les deux premiers termes sont $r_0 = a$ et $r_1 = b$).

10. Montrer que cet algorithme aboutit et donne bien le résultat attendu.

11. Montrer en reprenant l'algoritme en sens inverse qu'il permet de trouver une solution (x_0, y_0) à l'équation $ax + by = c$, où d est le pgcd de a et b

Applications numériques.

12. Résoudre $19x + 41y = 0$, $19x + 41y = 1$ $19x + 41y = 2$.

13. Résoudre $2730x + 5226y = 156$.