

Exercices sur la dualité

Notation : Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, E^* désigne le dual de E.

1. Calculer la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, où $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,1,-1)$ et $e_3 = (-2,-1,1)$.

2. Qu'est ce que l'orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ du singleton $\{(x,y,z) \mapsto 2x - y - z\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$? Le caractériser avec une équation, puis sans.

3. Calculer l'orthogonal dans $(\mathbb{R}^3)^*$ du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$, en déduire une équation de ce plan.

4. Soit $E = \mathbb{R}^4$. Calculer l'orthogonal $A^\perp$ dans E^* de la partie $\{(1,1,0,-1),(0,1,-1,0)\}$ de E. Calculer l'orthogonal $A^{\perp\circ}$ de $A^\perp$ dans E et donner un système d'équations pour ce dernier sous-espace.

5. Soit K un corps, n un entier, E l'espace des polynômes de degré $\leq n-1$ sur K et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments distincts de K.

a) Montrer que $(P \mapsto P(a_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E^*.

b) Soit $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de K. Montrer l'existence d'un unique polynôme[1] P, de degré $\leq n$, tels que $P(a_i) = b_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

c) Calculer explicitement P.

d) Soit $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de K. Reprendre la question (b) en imposant de plus à P la condition $P'(a_i) = c_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Quel doit être le degré de P pour que l'on ait à la fois existence et unicité ?

6. Soit K un corps ; montrer[2] que le dual de l'espace des polynômes $K^{(\mathbb{N})}$ est l'espace de suites $K^{\mathbb{N}}$.

[1] Que l'on appelle polynôme d'interpolation de Lagrange.

[2] Lorsque $K = \mathbb{Q}$, cet exercice fournit un exemple d'espace de dimension infinie qui n'est pas isomorphe à son dual. En effet, $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable et $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ne l'est pas.