TD intégration

L'objectif est de prouver une réciproque du théorème de convergence dominée. Soit donc f_n une suite de $L^1([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ et f dans le même espace avec

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \longrightarrow 0.$$

Le but est de construire une sous-suite $\sigma(n)$ telle que $f_{\sigma(n)}(x)$ converge vers $f(x)$ pour presque tout x.

1) Montrer qu'il existe $\sigma(n)$ croissante telle que

$$\int_0^1 |f_{\sigma(n)}(x) - f(x)|\,dx \le 2^{-n}.$$

2) On pose

$$O_n = \{x \in [0,\ 1] \mid |f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| \ge 2^{-n/2}\}.$$

Prouver que O_n est mesurable et que

$$|O_n| \le 2^{-n/2}.$$

3) Soit $O = \cap_{N\in\mathbb{N}} \cup_{n=N}^{\infty} O_n$. Expliquer que O est mesurable et de mesure nulle.

4) Pour tout $x \in [0,\ 1] \setminus O$, conclure que $f_{\sigma(n)}(x)$ converge vers $f(x)$.

5) Soit la suite $f_n(x)$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[n/2^k - 1,\ (n+1)/2^k - 1]$ si $n \in [2^k,\ 2^{k+1} - 1]$. Montrer que f_n converge vers 0 dans L^1 mais que pour tout x, $f_n(x)$ ne converge pas vers 0.

On remarquera qu'une légère modification de la preuve (remplaçant $f(x)$ par $f_{\sigma(n+1)}$) permet d'obtenir la complétude de L^1.