Agrégation, exercices transformation de Fourier,
Année 2006-2007.

A. Calcul de transformées de Fourier dans L^1.

Calculer les transformées de Fourier des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ suivantes, où $t > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = e^{-t|x|}, \qquad f(x) = e^{-tx^2}, \qquad f(x) = xe^{-tx^2}.$$

B. Principe d'incertitude de Heisenberg.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \, dx = 1$. On note

$$\bar{x} \equiv \int_{\mathbb{R}^d} x|f(x)|^2 \, dx \in \mathbb{R}^d \qquad \text{et} \qquad \bar{\xi} \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \xi |\hat{f}(\xi)|^2 \, \frac{d\xi}{(2\pi)^d} \in \mathbb{R}^d.$$

1) On suppose dans cette question $\bar{x} = \bar{\xi} = 0$. Justifier l'intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \, dx = -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} x \cdot \nabla(|f|^2) \, dx = -\frac{2}{d} \int_{\mathbb{R}^d} x \cdot \text{Re } (\bar{f} \nabla f) \, dx.$$

Utiliser le théorème de Fourier-Plancherel pour calculer

$$\int_{\mathbb{R}^d} ||\nabla f||^2 \, dx.$$

En déduire que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} ||x||^2 \, |f(x)|^2 \, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} ||\xi||^2 \, |\hat{f}(\xi)|^2 \, \frac{d\xi}{(2\pi)^d}\right) \geq \frac{d^2}{4}.$$

Déterminer les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

2) On suppose $\bar{x}$ et $\bar{\xi}$ quelconques et on considère la fonction

$$g(x) = e^{-i(x-\bar{x}) \cdot \bar{\xi}} f(x - \bar{x}).$$

Exprimer $\hat{g}$ en fonction de $\hat{f}$ et vérifier que $\int_{\mathbb{R}^d} x|g(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \xi |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi = 0$.
En déduire que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} ||x - \bar{x}||^2 \, |f(x)|^2 \, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} ||\xi - \bar{\xi}||^2 \, |\hat{f}(\xi)|^2 \, \frac{d\xi}{(2\pi)^d}\right) \geq \frac{d^2}{4}.$$

C.Théorème d'échantillonage.

Soit $r > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction telle que Support $(\hat{f}) \subset [-r, r]$.

1) Prouver que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que l'expression

$$E(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2n\pi)$$

définit une fonction E continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. En déduire que E est une distribution tempérée .
3) Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\theta} = \psi$. Soit S la distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, $S = \mathcal{F}^{-1}(E)$. Justifier que $f\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, puis que

$$\langle S, \psi \rangle = \int E(\xi)\theta(\xi) d\xi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\psi(n)$$

(On rappelle la formule sommatoire de Poisson : $\Sigma_{k \in \mathbb{Z}} \theta(\xi + 2\pi k) = (2\pi)^{-1} \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}(n) e^{in\xi}$)
En déduire

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\delta_n \qquad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

et que la suite $S_N = \sum_{-N \leq n \leq N} f(n)\delta_n$ converge vers S dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
5) On suppose à présent $0 < r < \pi$. Soit $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\rho}(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq r$ et $\hat{\rho}(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq \pi$. Justifier l'existence d'une telle fonction ρ. Montrer que l'on a $\hat{f} = \hat{\rho}E$. Soit $T_N = S_N * \rho$; Montrer que T_N converge vers f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En déduire l'égalité dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\rho(x - n)$$

D. Transformée de Fourier des Gaussiennes

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ un nombre complexe vérifiant $Re(z) = a \geq 0$. On note $\sqrt{z}$ l'unique racine carrée de z telle que $Re(\sqrt{z}) \geq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_z(x) = \exp(-z\frac{x^2}{2})$.

1) On suppose $Re(z) > 0$ et on pose $C(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_z(x)\, dx$. Montrer l'égalité $C(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}}$. (On rappelle que $\frac{d}{db}(\sqrt{a + ib}) = i/2(\sqrt{a + ib})^{-1}$; calculer la dérivée par rapport à b de la fonction d'une variable réelle $b \to \sqrt{a + ib}C(a+ib)$ et utiliser $C(a) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}$ pour $a > 0$). Montrer que $C(z)$ se prolonge continuement en $z = ib$ pour $b > 0$, et qu'on a $C(ib) = e^{-i\pi/4}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{b}}$.

2) On suppose $Re(z) = a > 0$. Montrer que $f_z(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Vérifier qu'on a $f_z' + zxf_z = 0$. En déduire que la transformée de Fourier $\hat{f}_z(\xi)$ de f_z vérifie

$$\hat{f}_z(\xi) = C(z) \exp(-\frac{\xi^2}{2z}) = C(z) f_{1/z}(\xi)$$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) \geq 0, z \neq 0$. Montrer que f_z est une distribution tempérée, et que sa transformée de Fourier vérifie $\hat{f}_z(\xi) = C(z) \exp(-\frac{\xi^2}{2z}) = C(z) f_{1/z}(\xi)$ (utiliser la question 2) et la continuité de la transformée de Fourier sur les distributions tempérées).

4) On considère l'équation de Schrödinger pour $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$i\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0, \qquad u(t=0,x) = u_0(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$$

On cherche une solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$, et on note $u_t(x) = u(x,t)$ et $\hat{u}_t = \mathcal{F}(u_t)$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\hat{u}_t$. Résoudre cette équation différentielle, et appliquer la transformée de Fourier inverse à $\hat{u}_t$ (on utilisera les résultats de la question 3)) pour exprimer la solution par une convolution, à savoir

$$u(t,x) = u_0 * (e^{-i\frac{\pi}{4}} (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp{(i\frac{|x|^2}{4t}})).$$