Université de Nice-Sophia Antipolis 2007/2008
Département de Mathématiques
Préparation à l'agrégation de mathématiques

TD: Exponentielle de matrices

Exercice 1: Soient $U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Calculez $e^U e^V$, $e^V e^U$ et e^{U+V}.

Exercice 2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculez $\exp(A)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Exercice 3: Résoudre les systèmes différentiels suivants:

a. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **b.** $\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$

c. $\begin{cases} x' = -2x + 2y \\ y' = -2x + y \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

e. $\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix} X$ **f.** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Exercice 4: On se place dans un espace de Banach E de dimension finie muni de la norme $\| \cdot \|$. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$. Déterminez

$$\lim_{n \to +\infty} \left(Id + \frac{1}{n} f \right)^n .$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouvez toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(M) = I_n$.

Exercice 6. On se place dans $M_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit S l'ensemble des solutions $Y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ de

$$Y' = AY \qquad (E)$$

a. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur A pour que toutes solutions de (E) convergent quand $t \to +\infty$.

b. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur A pour que toutes solutions de (E) soient bornées.

Exercice 7: Soit $f : \mathbb{R} \to Gl_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu. On suppose de plus que f est différentiable en 0. Montrez qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $f(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.