Applications des séries entières.

A faire chez soi: Ex. 1, les questions **1)**, **2)** *et* **3)** *a).*

Ex. 1 : Calculs de sommes, d'intégrales, du terme général d'une suite.

1) Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ en fonction de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$. Ecrire $\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\, dt$ comme la somme d'une série; décomposer en éléments simples et la sommer.

2) Calculer les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\, dx$, $\int_0^1 \left(\frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$ ainsi que, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x+\cdots+x^p)}{x}\, dx.$$

3) *a)* Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$ à l'aide d'une série entière judicieuse, solution d'une équation différentielle linéaire que l'on résoudra.

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n^2-1}$ en décomposant en éléments simples et avec une série entière judicieuse.

4) *NOMBRES de CATALAN.* Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite des *nombres de Catalan* définie par $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. Pour $n \geq 1$, a_n est le nombre de façons de parenthéser une expression de n symboles, ou encore le nombre de façons de partager un polygone convexe à $n+1$ côtés en triangles dont les sommets sont ceux du polygone.

a) On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Déterminer une relation entre $f(z)$ et $f(z)^2$.

b) En déduire f, puis a_n à l'aide d'un développement en série entière. Rigueur du raisonnement ?

Ex. 2 : Dénombrement.

1) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre d'involution de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ (*i.e.* le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $\sigma \circ \sigma = Id_n$). On pose $u_0 = 1$.

a) Justifier que si $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + n u_{n-1}$ (séparer quand σ fixe ou non $n+1$).

b) Montrer que la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ a un rayon $R \geq 1$, puis que $f'(x) = (1+x)f(x)$.

c) Exprimer alors f et donner une expression de u_n sous forme d'une somme.

2) On note a_n le cardinal de $\{(u,v) \in \mathbb{N},\ 2u+3v=n\}$. Vérifier que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = F(z)$ est une fraction rationnelle que l'on calculera. Décomposer F sur $\mathbb{C}$ et exprimer a_n à l'aide d'une somme (finie). En déduire un équivalent simple de a_n quand $n \to +\infty$. $\big[$ cf. GOURDON, Ex. 7 p. 247, et aussi CHAMBERT-LOIR & CIE, Vol. 1, Ex. 6.9 $\big]$.

3) Pour $0 \leq p \leq n$ entiers, on note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $\{1, \cdots, n\}$ ayant exactement p point fixes, et $D(n) = N(n,0)$.

a) Trouver une relation entre $N(n,p)$ et $D(n-p)$.

b) Etablir que $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$ a un rayon ≥ 1. Regarder $\sum_{p=0}^{n} N(n,p)$ et calculer explicitement f. Exprimer ensuite $D(n)$ avec une somme finie, et donner $\lim_{n\to+\infty} \frac{N(n,p)}{n!}$.

Ex. 3 : Equations différentielles.

1) *a)* Pour $\omega > 0$, déterminer f série entière sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle

$$(*) \qquad xy''(x) + 2y'(x) + \omega^2 xy(x) = 0.$$

b) Déterminer alors une autre solution de $(*)$ sous la forme $y(x) = z(x)f(x)$.

2) *a)* Déterminer une série entière solution de l'équation de Bessel (d'indice 0)

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

b) Déterminer une fonction $f(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$) solution de l'équation de Bessel (d'indice $\frac{1}{2}$) sur $\mathbb{R}_+^*$

$$x^2y''(x) + xy'(x) + \big(x^2 - \frac{1}{4}\big)y(x) = 0.$$

Références :

• *Précis Analyse-Géométrie, Tome 7, Bréal, Ex. 6.14 et Ex. 6.10* : Ex. 1 **1)**, **2)**, **3)***b)*; Ex. 2 **1)**.
• *Leichtnam-Schauer, Exercices X-ENS, Tome 4 (ex. E.5)* : Ex. 3 **1)**.
• *Francinou-Gianella-Nicolas - Analyse 2 (Ex. 3.10)* : Ex. 1 **3)***a)* pour $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(5n)!}$.
• *L. Schwartz, Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques, Chap. IX* : Ex 3 **2)**.