

Quelques exercices de calcul d'intégrales

Exercice 1: Calculs de primitives. Pour chacune des fonctions suivantes, donnez son domaine de définition puis ses éventuelles primitives (entre parenthèses: les calculs à faire pendant la séance).

CV (a,b):

$$(a) x \mapsto \frac{(\ln x)^p}{x} \quad (p \in \mathbb{Z}), \quad (b) x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \quad (c) x \mapsto \frac{\cos \ln x}{x}$$

$$(d) x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}, \quad (e) x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

IPP (a,b):

$$(a) x \mapsto \arcsin x, \quad (b) x \mapsto x^p \ln x, \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$(c) x \mapsto \frac{x}{\cosh^2 x}, \quad (d) x \mapsto x \tan^2 x$$

Fractions rationnelles (a,b,c):

$$(a) x \mapsto \frac{1}{1+x^3}, \quad (b) x \mapsto \frac{1}{1+x^4} \quad (c) x \mapsto \frac{x^5+2}{x^5-x}$$

$$(d) x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad (e) x \mapsto \frac{2}{x(x^2+1)^3}$$

Fonctions trigonométriques (a):

$$(a) x \mapsto \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}, \quad (b) x \mapsto \frac{1}{1 + 2 \sin^2 x}, \quad (c) x \mapsto \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Intégrales abéliennes (a):

$$(a) x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}, \quad (b) x \mapsto \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2-1}{4-x^2}}$$

Exercice 2: Déterminez des primitives des fonctions réelles $x \mapsto e^{ax} \cos(bx) dx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx) dx$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3: Calculez $\int_0^1 \frac{1+\arctan x}{1+x^2} dx$, $\int_a^b \frac{dx}{x \ln x}$ ($a, b > 1$), $\int_a^{1/a} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ ($a > 0$), $\int_0^a e^{-\sqrt{t}} dt$.

Exercice 4: Sommes de Riemann. Calculez

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right) \text{ où } f \in C^1([0, 1]).$$

Exercice 5: Soit $f \in C^0([0, 1])$ telle que $f \geq 0$. Montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f^n dx \right)^{1/n} = \max_{[0,1]} f.$$

Exercice 6: Soit $f \in C^0([0, 1])$. Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx$.

Exercice 7: $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

Exercice 8: Calculez $\int_0^1 (E(\frac{2}{t}) - 2E(\frac{1}{t})) dt$ où $E(\cdot)$ désigne la partie entière.