COMPACITE.

Ex. 1 : Théorème de Riesz. Soit E un espace vectoriel normé. On souhaite montrer le théorème de Riesz :

$\bar{B}(0,1)$ *est compacte si et seulement si* E *est de dimension finie.*

1) Pourquoi ceci est-il vrai quand E est de dimension finie ?

2) On suppose E de dimension infinie (*i.e.* E n'est pas de dimension finie). On suppose $\bar{B}(0,1)$ inclus dans une réunion finie de boules ouvertes $B(a_i,1)$, $1 \leq i \leq n$. Soit $F = \mathrm{Vect}(a_1,...,a_n)$. Justifier l'existence de $x \in E$ tel que $x \notin F$. Pourquoi existe-t-il $y \in F$ tel que $d(x,F) = \|x-y\| > 0$? En notant $a = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$, démontrer que $d(a,F) \geq 1$. Montrer par ailleurs qu'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $\|a - a_i\| < 1$. Conclure.

3) *Cas pré-hilbertien.* On suppose $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pré-hilbertien de dimension infinie. Construire par récurrence une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormée. On suppose que $(e_{n_k})_k$ est une sous-suite de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans E vers x. Montrer que $\|x\| = 1$, et que $\|x\|^2 = \lim\limits_{k\to+\infty} \langle e_{n_{k+1}}, e_{n_k}\rangle = 0$. Conclure. Donner au moins un exemple de telle suite dans un espace pré-hilbertien.

Ex. 2 : Base d'Auerbach. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n. On souhaite montrer qu'

il existe une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ *de* E *normée telle que sa base duale* $(e_1^*, ..., e_n^*)$ *soit aussi normée.*

1) Lorsque E est un espace euclidien ou hermitien, donner des bases de E satisfaisant cette propriété. Sont-ce les seules ?

2) Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E normée, et $(e_1^*, ..., e_n^*)$ sa base duale. Pour $i = 1, ..., n$, établir que $\|e_i^*\| \geq 1$ en calculant e_i^* d'un bon vecteur.

3) On note $S = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$, et on considère une base $\mathcal{B}$ normée de E fixée. Vérifier que l'application $\phi : S^n \to \mathbb{R}$ définie pour $(x_1, ..., x_n) \in S^n$ par $\phi(x_1, ..., x_n) = |\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)|$ admet un maximiseur, noté $(e_1, ..., e_n)$. Pourquoi $(e_1, ..., e_n)$ est-elle une base normée de E ? Pour $x \in S$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, calculer $\phi(x, e_2, ..., e_n)$ en fonction de α_1 et $\phi(e_1, e_2, ..., e_n)$, et en déduire que $|\alpha_1| \leq 1$, puis que $\|e_1^*\| \leq 1$. Conclure.

Ex. 3 : Idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Soit (X,d) un espace métrique compact.

1) Vérifier que si $y \in X$, l'ensemble $\mathcal{I}_y = \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}),\ f(y) = 0\}$ est un idéal maximal de l'anneau $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. On pourra introduire le morphisme (de quoi ?) $\delta_y : \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \ni f \mapsto f(y) \in \mathbb{R}$.

2) *a)* Soit J un idéal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, tel que pour aucun $y \in X$, $J \not\subset \mathcal{I}_y$. Montrer alors que $X = \bigcup_{y\in X} f_y^{-1}(\mathbb{R}^*)$, puis qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, y_1, ... , $y_k \in X$ tels que $X = \bigcup_{1\leq i\leq k} f_{y_i}^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Justifier alors que $f = \sum_{i=1}^{k} f_{y_i}^2 \in J$ et ne s'annule pas, et conclure que $J = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

b) Montrer que les seuls idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ sont les $\mathcal{I}_y$, $y \in X$. En déduire que les morphismes d'algèbre $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont les $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \ni f \mapsto f(y) \in \mathbb{R}$, pour $y \in \mathbb{R}$.

3) Vérifier que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un idéal strict (ou propre) de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, qui n'est inclus dans aucun idéal $\mathcal{I}_y$, $y \in \mathbb{R}$. Tous les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-ils des $\mathcal{I}_y$?

Ex. 4 : Espaces de suites. On travaille dans $(c_0, |\cdot|_{\ell^\infty})$, où c_0 est l'ensemble des suites complexes de limite nulle. Pourquoi est-ce un Banach ?

1) Soit $A \subset c_0$ une partie fermée. On souhaite montrer que A est compacte si $\lim_{+\infty} u = 0$ uniformément pour $u \in A$, *i.e.* : A compacte $\Longleftrightarrow \exists f \in c_0,\ f \geq 0,\ \forall u \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq f_n$.

a) $\Rightarrow$ Vérifier que A est bornée (*i.e.* il existe $R > 0$ tel que pour tout $u \in A$, $|u|_{\ell^\infty} \leq R$). On note alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \sup_{u \in A} |u_n|$: il suffit alors de prouver que $f \in c_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$, et en déduire que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ et $u \in A$, $|u_n| \leq \varepsilon$. Conclure.

b) $\Leftarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_n \leq \varepsilon$ si $n > N$. Vérifier que $K \equiv \{(u_0, ..., u_N),\ u \in A\}$ est un compact de $\mathbb{R}^{N+1}$. En déduire qu'il existe $v^1, ..., v^p \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_\infty(v^i, \varepsilon)$. En notant $\tilde{v}^i$ le prolongement de v^i par 0 pour $n > N$, montrer que $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_\infty(\tilde{v}^i, \varepsilon)$ et conclure.

c) $\Leftarrow$ (*autre preuve utilisant une extraction diagonale*). Soit $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans A. Déduire de la majoration $\forall k \geq 1$, $|u_0^k| \leq f_0$ qu'il existe une extraction $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_0^{\varphi_0(k)})_k$ converge, de limite notée u_0. Puis, montrer de même qu'il existe une extraction $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_1^{\varphi_0 \circ \varphi_1(k)})_k$ converge, de limite notée u_1... idem pour n. Vérifier alors que $\varphi(k) \equiv \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ ... \circ \varphi_k(k)$ est une extraction, appelée *extraction diagonale*, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n^{\varphi(k)})_k$ converge vers u_n, et $|u_n| \leq f_n$, donc $u \in c_0$. Soit enfin $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n > N$, $|u_n - u_n^{\varphi(k)}| \leq \varepsilon$. Conclure alors que $u^{\varphi(k)} \to u$ dans c_0.

2) Si $1 \leq p < \infty$, on travaille dans $\ell^p(\mathbb{N}^*) = \left\{ \text{suites } u,\ \sum_{n \geq 1} |u_n|^p = |u|_{\ell^p}^p < \infty \right\}$, et on considère une partie $A \subset \ell^p$ fermée. Montrer que A est compacte si et seulement si A est bornée et *équisommable*, *i.e.* $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $u \in A$, $\sum_{n \geq N} |u_n|^p \leq \varepsilon^p$ (raisonner comme au **1)** *b)* en utilisant les recouvrements).

3) On considère, pour $A \subset \ell^p$ fermée, la propriété $(*)$ $\exists f \in \ell^p$, $f \geq 0$, $\forall u \in A$, $\forall n \geq 1$, $|u_n| \leq f_n$.

a) Montrer que A peut être compacte sans que $(*)$ soit vraie. On pourra envisager la suite $(u^k)_{k \geq 1}$ définie par $u_n^k = n^{-\frac{1}{p}} \delta_{k,n} = n^{-\frac{1}{p}}$ si $n = k$ et $= 0$ sinon.

b) Vérifier que si $(*)$ est vraie, alors A est compacte en suivant **1)** *b)* ou en utilisant **2)**.

Références :

- X. Gourdon, **Ex. 1** (p. 56), **Ex. 3** (p. 37).
- S. Francinou, H. Gianella, *Ex. d'Analyse pour l'Agrég. (Algèbre 1).* Masson. **Ex. 3** (Ex. 2. 30, p. 74).
- Zuily-Queffellec, **Ex. 2** (p. 160) et **Ex. 4** (Ex. 19 p. 179).