

CONTINUITÉ UNIFORME.

Ex. 1 : Régularisation.

1) Revoir la preuve de “ $\rho_n * f \rightarrow f$ ” où (ρ_n) est une suite régularisante (voir T.D. Weierstrass et Fejèr).

2) a) En utilisant que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ si $1 \leq p < \infty$, établir que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{si } h \rightarrow 0.$$

b) (re-)Démontrer alors que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_n * f \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ si $n \rightarrow +\infty$. Idem avec le noyau de Fejèr et des fonctions $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique.

Ex. 2 : Les théorèmes de Dini.

1) Voir l'exercice 5 p. 229 dans GOURDON.

2) 1ère application : le théorème de Mercer. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X un compact métrique, et $T : X \rightarrow \mathcal{H}$ continu. Pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = \langle T(x), e_n \rangle$. Montrer que pour tout $x \in X$,

$$|T(x)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|^2,$$

avec convergence uniforme de la série pour $x \in X$.

3) 2ème application : le théorème de Glivenko-Cantelli. Soit (X_n) une suite de v.a. réelles i.i.d. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F la fonction de répartition commune des X_n , et on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{X_k \leq t}.$$

Nous allons établir que, p.s. quand $n \rightarrow +\infty$, $V_n \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \rightarrow 0$.

a) Un cas simple. On suppose ici la loi commune des X_k est la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Etablir que, quand $n \rightarrow +\infty$, $F_n(s) \rightarrow s$ p.s. avec la loi des grands nombres. En déduire que si $s \in [0, 1]$, il existe $N_s \subset \Omega$ négligeable tel que $F_n(s) \rightarrow s$ si $n \rightarrow +\infty$ sur $\Omega \setminus N_s$. Montrer alors l'existence de $N \subset \Omega$ négligeable tel que $\forall s \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $F_n(s) \rightarrow s$ si $n \rightarrow +\infty$ sur $\Omega \setminus N$. Justifier alors que $\forall s \in [0, 1]$, $F_n(s) \rightarrow s$ si $n \rightarrow +\infty$ sur $\Omega \setminus N$ (on utilisera le fait que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} et que $F_n(s)$ croît avec s). Conclure alors à l'aide du théorème de Dini que

$$\text{p.s.} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow +\infty.$$

b) Pour $u \in [0, 1]$, on pose $F^{\leftarrow}(u) = \inf F^{-1}([u, +\infty[)$. Vérifier que si $t \in \mathbb{R}$ et $u \in [0, 1]$, alors $F^{\leftarrow}(u) \leq t$ ssi $u \leq F(t)$. Démontrer ensuite que si U suit une loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$, alors $F^{\leftarrow}(U)$ suit la loi commune des X_k .

c) Réduction au cas simple. Soit (\tilde{X}_n) une suite de v.a. de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$ i.i.d., et \tilde{V}_n, \tilde{F}_n les fonctions associées. Déduire de b) que V_n a même loi que $W_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \tilde{F}_n(F^{\leftarrow}(t)) - F^{\leftarrow}(t) \right|$, puis que $W_n \leq \tilde{V}_n$ en posant $s = F^{\leftarrow}(t)$. En déduire le résultat.

Ex. 3 : Composition.

On munit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme du sup. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue, on regarde l'application

$$F : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$$

$$u \mapsto f \circ u.$$

1) On suppose tout d'abord f à support compact.

a) Etablir que F est uniformément continue.

b) On suppose en outre f de classe \mathcal{C}^1 . Montrer alors que F est de classe \mathcal{C}^1 et exprimer sa différentielle simplement (on pourra utiliser une formule intégrale).

2) Lorsque f n'est pas forcément à support compact, montrer que F est continue; et si f est de classe \mathcal{C}^1 , F est de classe \mathcal{C}^1 .

Ex. 4 : Théorème de Sard dans un cas simple. Soit $I = [a, b]$ un segment, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 .

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_1, \dots, I_n le découpage naturel de I en n segments consécutifs de longueur $\frac{|I|}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$ suffisamment grand, on a

$$|f'(y) - f'(x)| \leq \varepsilon$$

lorsque x et y sont dans un même intervalle I_k .

2) On note $C = \{x \in I, f'(x) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de f .

a) Soit $1 \leq k \leq n$, et supposons $I_k \cap C \neq \emptyset$. Montrer à l'aide de 1) que $f(C \cap I_k)$ est inclus dans un intervalle de longueur $\leq \frac{\varepsilon}{n}$ (on majorera $|f'|$ sur I_k).

b) En déduire que l'ensemble des valeurs critiques $f(C)$ de f est un ensemble négligeable, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut l'inclure dans une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leq \varepsilon$.

3) Justifier que ceci reste vrai si I est un intervalle quelconque et pas forcément un segment.

Références :

- Ex. 2 2) H. QUEFFELEC, Topologie, Dunod; ou ZUILY-QUEFFELLEC.
- Ex. 2 3) Y. NOURDIN, Agrégation de mathématiques, épreuve orale ..., Dunod (th. 1.25.9).
- Ex. 3 F. ROUVIÈRE, PGCD, Chap. III, Ex. 42.