Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2007-2008
F.Robert

Corrigé des développements asymptotiques

Exercice 1: Donnez un développement de $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ lorsque $x \to +\infty$.

Réponse: Comme $\lim_{t\to 0,\, t>0} \frac{|\sin t|}{t} = 1$ existe, alors $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ est bien définie. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} |\sin t| \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{k\pi+\pi}\right) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\int_0^\pi |\sin t|\,dt}{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi |\sin(t+k\pi)| \left(\frac{1}{t+k\pi} - \frac{1}{k\pi+\pi}\right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi |\sin t| \left(\frac{1}{t+k\pi} - \frac{1}{k\pi+\pi}\right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{(t+k\pi)(k\pi+\pi)}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k}\right) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{(t+k\pi)(k\pi+\pi)}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{t-1}{(k+1)(t+k)}\,dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{(t+k\pi)(k\pi+\pi)}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi} \ln n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{t-1}{(1+\frac{1}{k})(1+\frac{t}{k})}\,dt + \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{(\pi + \frac{t}{k})(\pi + \frac{\pi}{k})}\,dt \right)
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{k\to+\infty} \frac{t}{k} = 0$ uniformément sur $[0,1]$ et $[0,\pi]$, on obtient

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi} \ln n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{k^2}$$

pour tout $n \geq 2$ avec

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (t-1)\,dt + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi (\pi - t)\sin t\,dt = 0.$$

Du coup, $\frac{u_k}{k^2} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et $2 > 1$, donc $\sum_{k=1}^\infty \frac{u_k}{k^2}$ converge, on note α_0 sa limite. De plus, on a

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{u_k}{k^2} = o\left(\sum_{k=n}^\infty \frac{2}{\pi k^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Du coup,

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\ln n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k^2} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{u_k}{k^2} = \frac{2}{\pi}\ln n + \alpha_0 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

quand $n \to +\infty$. Soit $\alpha = \alpha_0 + \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$. On a alors

$$\int_{0}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\ln n + \alpha + \frac{\epsilon_n}{n}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.

Soit $x > 2\pi$. Soit $n = E(x/\pi) \geq 2$. Soit $\theta := x - n\pi \in [0, \pi[$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,dt &= \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt + \int_{n\pi}^{n\pi+\theta} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\ln n + \alpha - \frac{2}{\pi n} + \frac{\epsilon_n}{n} + \int_0^{\theta} \frac{\sin t}{t + n\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\ln(x-\theta) + \alpha - \frac{2}{\pi}\ln \pi - \frac{2}{x-\theta} + \frac{\pi\epsilon_n}{x-\theta} + \int_0^{\theta} \frac{\sin t}{t + x - \theta} \\
&= \frac{2}{\pi}\ln x + \frac{2}{\pi}\ln(1 - \frac{\theta}{x}) + \alpha - \frac{2}{\pi}\ln \pi + \frac{\pi\epsilon_n}{x-\theta} + \frac{1}{x}\int_0^{\theta} \frac{\sin t}{1 + \frac{t-\theta}{x}}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\ln x + \alpha' - \frac{2\theta}{\pi x} + \frac{\pi\epsilon_n}{x-\theta} + \frac{1}{x}\int_0^{\theta} \sin t\,dt + o(x^{-1}) \\
&= \frac{2}{\pi}\ln x + \alpha' + \frac{1}{x}\left(-\frac{2\theta}{\pi} + 1 - \cos\theta + \frac{\pi\epsilon_n}{x-\theta}\right) + o(x^{-1})
\end{aligned}$$

On pose $\epsilon(x) = \epsilon_{E(x/\pi)}$. On a bien $\lim_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0$. Du coup, on obtient

$$\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\ln x + \alpha' + \frac{1}{x}\left(-\frac{2(x - E(x/\pi))}{\pi} + 1 - \cos(x - E(x/\pi))\right) + o(x^{-1})$$

quand $x \to +\infty$.

Exercice 2: Soit la suite réelle u définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donnez un DA de u.

Réponse: la suite u est bien définie et on montre par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n. Du coup, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite u est décroissante minorée (par 0) et donc elle converge. Soit $l \geq 0$ sa limite: par continuité de l'exponentielle, on a $l = e^{-l}$. Si $l \neq 0$, alors $1 = e^{-l}$ et $l = 0$: contradiction. DOnc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$: on a

$$u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = u_n^{\alpha}(e^{-\alpha u_n} - 1) \sim_{n\to+\infty} -\alpha u_n^{\alpha} \times u_n \sim_{n\to+\infty} -\alpha u_n^{\alpha+1}$$

car $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Du coup, avec $\alpha = -1$, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ diverge et est à termes positifs, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \sim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} 1$$

et donc $u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$. Soyons plus précis:

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = u_n^{-1}(e^{u_n} - 1) = u_n^{-1}(u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)) = 1 + \frac{u_n}{2} + o(u_n) = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc
$$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}-1\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}.$$
Or $1/(2n)>0$ et $\sum\frac{1}{2n}$ diverge, donc
$$\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_1}-n+1=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k}-1\right)\sim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}\sim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{2}$$
et donc
$$u_n \quad = \quad \frac{1}{n+\frac{\ln n}{2}+o(\ln n)}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{\ln n}{2n}+o(\frac{\ln n}{n})\right)=\frac{1}{n}-\frac{\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$
quand $n\to+\infty$.