THÉORÈME D'INVERSION LOCALE ET APPLICATIONS

FRÉDÉRIC ROBERT

1. Le théorème d'inversion locale (TIL)

1. Position du problème. Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Quand peut-on dire qu'elle est bijective? Si on sait que $f' > 0$, alors f est strictemtn croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers son image. De même, si $f' < 0$, f est strictement décroissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image. La fonction f' étant continue, on a donc pu conclure dans le cas $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Prenons le point de vue de la différentiabilité: la différentielle de f au point x est l'application

$$df_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & f'(x)h \end{array}$$

et du coup, $f'(x) \neq 0$ ssi df_x est un isomorphisme. Ce résultat se généralise aux fonctions sur des espaces de Banach.

2. Notion de C^k-difféomorphisme.

Définition 1. *Soit $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$. Soient E et F deux evn et soient U, W deux ouverts non-vides respectivement de E et F. Soit $f : U \to W$. On dit que f est un C^k-difféomorphisme si f est bijective et que f et f^{-1} sont C^k.*

3. Énoncé du Théorème

Théorème 1. *Soient E et F deux espaces de Banach et soit U un ouvert non-vide de E. Soit $f \in C^1(U,F)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df_{x_0} : E \to F$ est un isomorphisme continu de réciproque continue. Alors il existe $V \subset U$ un ouvert tel que $x_0 \in V$, il existe $W \subset F$ tel que $f(x_0) \in W$ tels que*
(i) $f(V) = W$
(ii) $f : V \to W$ est un C^1-difféomorphisme.

4. Énoncé en dimension finie

Théorème 2. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que*

$$det\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right)_{j\in\{1,\dots,n\}} \neq 0.$$

Alors il existe $V \subset U$ un ouvert tel que $x_0 \in V$, il existe $W \subset F$ tel que $f(x_0) \in W$ tels que
(i) $f(V) = W$
(ii) $f : V \to W$ est un C^1-difféomorphisme.

5. Définition. Dans l'énoncé précédent, la quantité $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0))$ est appelé le Jacobien de f, et est notée $\mathrm{Jac}(f)_{x_0}$.

6. Quelques exemples d'utilisation sur $\mathbb{R}^2$

a. Soit
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$$
Quand peut-on l'inverser (cad la rendre bijective) localement? On a $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ car ses coordonnées le sont (elle est même C^∞). Déterminons le Jacobien en un point (x,y):
$$\mathrm{Jac}(f)_{(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y$$
Soit donc un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 \neq y_0$. Donc $\mathrm{Jac}(f)_{(x_0,y_0)} \neq 0$, donc, d'après le théorème, il existe V, W deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $(x_0, y_0) \in V$, $f(x_0, y_0) \in W$ et tels que $f: V \to W$ est un C^1-difféomorphisme.

Ce résultat est local: c'est-à-dire que f n'est pas une bijection sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. En effet, on a par exemple $f(1,2) = f(2,1)$, donc f n'est pas bijective. Le théorème dit que, en revanche, si on se place près de $(1,2)$ (un point pour lequel $x \neq y$), alors on récupère de la bijectivite car l'autre point $(2,1)$ est loin

Pour cet exemple bien particulier, on peut même déterminer $f^{-1}: W \to V$ car f est une fonction assez simple.

En revanche, en un point (x_0, y_0) tel que $x_0 = y_0$, on n'obtiendra jamais de bijectivité de f: par exemple, au point $(1,1)$, on a $f(1-\epsilon, 1+\epsilon) = f(1+\epsilon, 1-\epsilon)$ pour tout $\epsilon \neq 0$. Donc, même en étant très proche de $(1,1)$, on n'aura jamais l'injectivité.

b. Soit
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$
La fonction f est bien définie et C^1 (et même C^∞). Son jacobien est
$$\mathrm{Jac}(f)_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$
Du coup, pour tout $r_0 \neq 0$ et tout $\theta_0 \in \mathbb{R}$, il existe V, W ouverts de $\mathbb{R}^2$ tel que $(r_0, \theta_0) \in V$ et $f(r_0, \theta_0) \in W$ tels que $f: V \to W$ est un C^1- difféomorphisme. On retrouve là un résultat bien connu: lorsque vous cherchez à passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, vous avez un problème à l'origine ($r = 0$) et il n'y a pas de détermination unique de l'angle θ, sauf si on se restreint à un intervalle de longueur 2π.

6. Un exemple d'utilisation sur les matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On se donne une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$. Existe-t'il une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = A + Tr(A)I_n + A^2 + A^3$?

Ce problème n'est pas facile: essayez avec $n = 1$! En utilisant le TIL, on va montrer que le problème peut être résolu pour des B "petits" (petit sera à définir).

Soit
$$\begin{array}{cccc} f: & M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & A + Tr(A)I_n + A^2 + A^3 \end{array}$$
La fonction f est bien définie et C^1 car ses coordonnées sont des polynômes en les coefficients de A (elle est même C^∞). Montrons qu'elle est localement bijective au

voisionage de 0. Plutôt que de calculer le jacobien, déterminons la différentielle en 0. Les normes étant toutes équivalentes en dimension finie, on choisit la norme $\|M\| = \max_{i,j} |M_{ij}|$ pour $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$: on a

$$f(H) - f(0) = H + Tr(H)I_n + H^2 + H^3$$

On pose alors $L(H) = H + Tr(H)I_n$, $\Theta(H) = \frac{H^2+H^3}{\|H\|}$ si $H \neq 0$ et $\Theta(0) = 0$. Du coup, on a

$$f(H) = f(0) + L(H) + \|H\|\Theta(H)$$

Montrons que $L = df_0$. Clairement, $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est linéaire, donc continue car on est en dimension finie. Pour $i, j \in \{1, ..., n\}$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} |\Theta(H)_{ij}| &= \frac{\left|\sum_{k=1}^n H_{ik}H_{kj} + \sum_{k,l=1}^n H_{ik}H_{kl}H_{lj}\right|}{\|H\|} \\ &\leq \frac{n\|H\|^2 + n^2\|H\|^3}{\|H\|} \leq n\|H\| + n^2\|H\|^2, \end{aligned}$$

cette inégalité étant valable aussi lorsque $H = 0$. Ainsi,

$$\|\Theta(H)\| \leq n\|H\| + n^2\|H\|^2$$

pour tout H et donc $\lim_{H\to 0} \Theta(H) = 0$. Donc $df_0(H) = L(H) = H + Tr(H)I_n$.

Pour appliquer le théorème d'inversion locale, montrons que df_0 est bijective. Soit $H \in \text{Ker } L$. On a $L(H) = 0$, donc $H = -Tr(H)I_n$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $H = \alpha I_n$. Du coup, $\alpha I_n = -Tr(\alpha I_n)I_n$, puis $(n+1)\alpha I_n = 0$, cad $\alpha = 0$ et donc $H = 0$. Donc $\text{Ker } L = \{0\}$. Donc L est injective, puis bijective car $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme en dimension finie. Puis son inverse est une application linéaire, donc continue (on est en dimension finie). On peut appliquer le théorème d'inversion locale:

Il existe V, W ouverts de $M_n(\mathbb{R})$ tels que $0 \in V$ et $0 = f(0) \in W$ et tels que $f : V \to W$ est un C^1-difféomorphisme. En particlulier, soit $\epsilon_0 > 0$ tel que $B(0, \epsilon_0) \subset W$: pour $B \in B(0, \epsilon_0)$, on a $B \in W$ et on pose $A = f^{-1}(B)$. On a donc montré le résultat suivant:

$$\forall B \in B(0, \epsilon_0), \exists A \in V \text{ telle que } B = A + Tr(A)I_n + A^2 + A^3$$

De plus, les coefficients de A varient de façon C^1 par rapport aux coefficients de B. On a donc résolu notre problème initial pour des B petits.

On touche là une des utilisations très fréquentes du TIL en math: quand on n'arrive pas à résoudre un problème, on se ramène à un problème plus simple (avec des applications linéaires!) en appliquant le TIL. On dit qu'on a linéarisé le problème.

7. Une remarque sur les énoncés. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que dans l'énoncé du TIL, f est C^k. Alors, dans la conclusion, on obtient que f est un C^k-difféomorphisme de V vers W.

Remarque: des exemples en dimension infinie viendront dans la partie suivante et en TD.

2. Théorème des fonctions implicites (TFI)

1. Position du problème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère l'ensemble $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\}$ et on cherche à paramétrer cet ensemble, par exemple en exprimant y en fonction de x: cad on cherche une fonction ϕ telle que $(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$. Pour avoir une idée des problèmes posés, étudions quelques exemples:

a. le cercle. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. On a $x^2 + y^2 = 1$ ssi $y = \sqrt{1 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (et bien entendu $|x| \leq 1$). On a donc deux possibilités pour paramétrer: laquelle choisir? Si on impose $y \geq 0$, la question est réglée car dans ce cas, la seule possibilité est $y = \sqrt{1 - x^2}$.

b. un lacet. On pose $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et on considère $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$.

Comment caractériser les points qui posent problème? On remarque qu'au point B, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(B) = 3(y^2 - x) = 0$, mais on a $\frac{\partial f}{\partial x}(B) = 3(x^2 - y) = 3(2^{4/3} - 2^{1/3}) = 3 \cdot 2^{1/3} \neq 0$. En revanche, au point C, $\frac{\partial f}{\partial y}(C) = \frac{\partial f}{\partial x}(C) = 0$. C'est en fait là que réside la substance du théorème des fonctions implicites: en résumé, si $\partial_y f \neq 0$, on va pouvoir exprimer y en fonction de x, et si $\partial_x f \neq 0$, on va pouvoir exprimer x en fonction de y. En revanche, dans les autres cas, on ne pourra rien dire.

2. Le TFI en dimension finie.

a. Par commodité, pour tout fonction $f \mapsto f(x, y)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on écrira $f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_p)$ avec $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ pour tout i, j.

b. Énoncé

Théorème 3. *Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts. Soit $f : U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ une fonction C^1 et soit $(x_0, y_0) \in U \times V$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et*

$$det\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right)_{j \in \{1, \dots, p\}} \neq 0.$$

Alors il existe $U_0 \subset U$ et $V_0 \subset V$ deux ouverts tels que $x_0 \in U_0$, $y_0 \in V_0$ et il existe $\varphi \in C^1(U_0, V_0)$ tels que

$$\forall (x, y) \in U_0 \times V_0,\ \{f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)\}$$

En particulier, $\varphi(x_0) = y_0$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in U_0$.

c. Qu'est-ce que le déterminant du théorème? C'est simplement le Jacobien de l'application

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f}: & V & \to & \mathbb{R}^p \\ & y & \mapsto & f(x_0, y) \end{array}$$

Cela revient donc à écrire la matrice des dérivées de f seulement selon les y_i.

d. Une astuce pour se rappeler l'hypothèse du théorème. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit $f(x, y) = ax + by + c$. Lorsque $f(x, y) = 0$, on souhaite exprimer y en fonction de x: $f(x, y) = 0$ ssi $y = -\frac{ax+c}{b}$, et ceci a un sens à condition que $b \neq 0$. Or $b = \frac{\partial f}{\partial y}$. Du coup, on exprimer y en fonction de x dès que $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$.

Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on exprime y, z en fonction de x dès que $\det(\partial_y f, \partial_z f) \neq 0$, etc.

3. Retour à l'exemple initial on reprend la fonction $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Elle est C^1. Le théorème se reformule ainsi: soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe U_0, V_0 ouverts de $\mathbb{R}$ tels que $x_0 \in U_0$, $y_0 \in V_0$, il existe $\varphi : U_0 \to V_0$ tels que

$$\forall (x,y) \in U_0 \times V_0,\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

Quels sont les points qui conviennent? Les points qui ne conviennent pas sont les (x,y) tels que

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ y^2 = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y^3(y^3 - 2) = 0 \\ y^2 = x \end{array} \right\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \text{ ou } y = 2^{1/3} \\ y^2 = x \end{array} \right\}$$

On récupère donc deux points: $(0,0)$ et $(2^{2/3}, 2^{1/3})$, cad les points C et B vus plus haut. On retrouve bien le resultat qu'on avait pressenti sur le dessin.

Et pour exprimer x en fonction de y? Il suffit d'échanger les variables dans le théorème. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe U_0, V_0 ouverts de $\mathbb{R}$ tels que $x_0 \in U_0$, $y_0 \in V_0$, il existe $\psi : U_0 \to V_0$ tels que

$$\forall (x,y) \in U_0 \times V_0,\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \Leftrightarrow x = \psi(y).$$

Un calcul similaire au précédent montre que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ ssi $(x_0, y_0) = (0,0)$ ou $(x_0, y_0) = (2^{1/3}, 2^{2/3})$. Donc en dehors de ces deux points, on peut exprimer x en fonction de y.

Du coup, on a pu paramétrer partout sauf en $(0,0)$: on peut aussi voir le point $(0,0)$ comme l'unique point "non lisse" sur la courbe.

4. Que peut-on dire sur la fonction implicite? Le TFI est essentiellement un résultat théorique: il donne l'existence de φ, mais pas son expression (c'est pour cela qu'on dit "implicite"). Mais on peut avoir beaucoup d'informations quand même: reprenons les notations du théorème. On a $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in U$. Dérivons par rapport à la variable x_i:

$$0 = \frac{\partial (f(x, \varphi(x)))}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varphi(x)) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, \varphi(x)) \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)$$

et du coup, en prenant $x = x_0$, comme on a $\varphi(x_0) = y_0$, on obtient

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_j}(x_0, y_0) \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0)$$

et en fait, la condition du théorème sur le déterminant non nul assure qu'on peut calculer explicitement $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0)$. On va voir cela sur des exemples.

5. Exemples en dimension finie.

a. Soit $C \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^4 - 5x^3 + 6y^3 = C\}$. Déterminez C afin que $(2,1) \in \mathcal{D}$. Montrez qu'au voisinage de $(2,1)$, on peut exprimer $y = \varphi(x)$ avec φ dérivable. Calculez $\varphi'(2)$.

Résolution: On pose $f(x,y) = x^4 - 5x^3 + 6y^3 - C$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On veut $f(2,1) = 0$, cad $C = -18$. On a $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, donc elle est C^1. Pour appliquer le TFI, il faut $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \neq 0$. le calcul donne

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = (-10x^3 + 18y^2)_{|(2,1)} = -62 \neq 0$$

Donc il existe I, J deux ouverts de $\mathbb{R}$ (on peut supposer que ce sont des intervalles) tels que $2 \in I$, $1 \in J$ et il existe $\varphi \in C^1(I,J)$ telle que pour tout $(x,y) \in I \times J$, on a $f(x,y) = 0$ ssi $y = \varphi(x)$.
Du coup, on a $\varphi(2) = 1$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$, I intervalle. Dérivons par rapport à x (tout le monde est dérivable): on obtient

$$0 = \frac{\partial (f(x,\varphi(x)))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \qquad (\star)$$

En prenant $x = 2$, on a $\varphi(2) = 1$ et du coup

$$\varphi'(2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)} = -\frac{28}{62} = -\frac{14}{31}.$$

En redérivant $(\star)$ (après justification), on peut trouver $\varphi''(2)$, etc. Du coup, on peut trouver un DL de φ à tout ordre.

b. Soit

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (xy + e^{-yz} + x^2 z, z^3 + \sin((x-z)y)) \end{array}$$

On a $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, et donc C^1. On a $f(2,0,1) = (5,1)$ et on pose $\mathcal{D} = \{(x,y,z)/\, f(x,y,z) = (5,1)\}$. Pour des points proches de $(2,0,1)$, on va paramétrer y et z en fonction de x

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(2,0,1) = \begin{vmatrix} x - ze^{-yz} & -ye^{-yz} + x^2 \\ (x-y)\cos((x-z)y) & 3z^2 \end{vmatrix}(2,0,1) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc il existe U_0 ouvert de $\mathbb{R}$, il existe V_0 ouvert de $\mathbb{R}^2$ tels que $0 \in U_0$ et $(1,0) \in V_0$, il existe $\varphi \in C^1(U_0, V_0)$ telle que

$$\forall x \in U_0,\ (y,z) \in V_0,\ \{f(x,y,z) = (3,1) \Leftrightarrow (y,z) = \varphi(x)\}$$

Pour plus de commodité, on va écrire $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ avec $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(U_0, \mathbb{R})$. En particulier, on a $\varphi(2) = (0,1)$ et donc $\varphi_1(2) = 0$ et $\varphi_2(2) = 1$. Calculons les dérivées de φ_1 et φ_2 en 2. On a $0 = f(x, \varphi(x)) = f(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, et du coup

$$\left\{ \begin{array}{l} x\varphi_1 + e^{-\varphi_1\varphi_2} + x^2\varphi_2 = 3 \\ \varphi_2^3 + \sin((x - \varphi_2)\varphi_1) = 1 \end{array} \right\}$$

Dérivons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 + x\varphi_1' - (\varphi_1'\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2')e^{-\varphi_1\varphi_2} + 2x\varphi_2 + x^2\varphi_2' = 0 \\ 3\varphi_2'\varphi_2^2 + ((1 - \varphi_2')\varphi_1 + (x - \varphi_2)\varphi_1')\cos((x-\varphi_2)\varphi_1) = 0 \end{array} \right\}$$

en $x = 2$, comme $\varphi_1(2) = 0$ et $\varphi_2(2) = 1$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1' + 4 + 4\varphi_2' = 0 \\ \varphi_1' + 3\varphi_2' = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1'(2) = 12 \\ \varphi_2'(2) = -4 \end{array} \right\}$$

6. Le TFI en dimension infinie.

a. Norme sur un produit d'evn.

Proposition-Définition 1. *Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux evn. Pour $(x, y) \in E \times F$, on définit $N_{E\times F}(x, y) = N_E(x) + N_F(y)$. Alors $N_{E\times F}$ est une norme sur $E \times F$.*

La preuve de cette proposition est laissée en exercice.

b. Énoncé du Théorème.

Théorème 4. *Soient E, F, G trois espaces de Banach. On munit le produit $E \times F$ de la norme du* **a.** *Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts: alors $U \times V$ est un ouvert de $E \times F$. Soit $f : U \times V \to G$ une fonction C^1 et soit $(x_0, y_0) \in U \times V$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$. On définit*

$$\begin{array}{rccc} L: & F & \to & G \\ & y & \mapsto & df_{(x_0,y_0)}(0, y) \end{array}$$

et on suppose que $L : F \to G$ est un isomorphisme continu de réciproque continue. Alors il existe $U_0 \subset U$ et $V_0 \subset V$ deux ouverts tels que $x_0 \in U_0$, $y_0 \in V_0$ et il existe $\varphi \in C^1(U_0, V_0)$ tels que

$$\forall (x, y) \in U_0 \times V_0,\ \{f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)\}$$

En particulier, $\varphi(x_0) = y_0$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in U_0$.

c. Remarque. Le théorème ci-dessus implique le théorème vu en dimension finie. En effet, avec $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^p$ et n'importe quelle norme sur ces espaces, la matrice de L dans la base canonique est

$$\mathrm{Mat}(L) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right)_{j=1,\ldots,p}$$

Ainsi, L est un isomorphisme ssi le déterminant ci-dessous est non nul. Comme les applications linéaires sont continues en dimension finie, on retrouve exactement la condition du théorème en dimension finie.

d. Indication sur la preuve. On se ramène au TIL en introduisant la fonction $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$. On montre que Φ est C^1 et que sa différentielle en (x_0, y_0) est bijective de bijection continue. Puis on montre (avec quelques précautions) que $\varphi(x) = \pi_2 \circ \Phi^{-1}(x, 0)$ où $\pi_2 : U \times V \to V$ est définie par $\pi_2(x, y) = y$.

7. Preuve du théorème. Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & U \times V & \to & E \times G \\ & (x, y) & \mapsto & (x, f(x, y)) \end{array}$$

On munit $E \times G$ de la norme définie au **6.a.**. Montrons que Φ est différentiable en (x_0, y_0). Soit $r > 0$ tel que $B((x_0, y_0), r) \subset U \times V$ et soit $(x, y) \in E \times F$ tel que $\|(x, y)\| < r$. Comme f est C^1, il existe $\theta : E \times F \to G$ tel que

$$f((x_0, y_0) + (x, y)) = f(x_0, y_0) + df_{x_0,y_0}(x, y) + \|(x, y)\|\theta(x, y)$$

avec $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \theta(x, y) = 0$. Du coup, on peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi((x, y) + (x_0, y_0)) - \Phi(x_0, y_0) &= (x, f((x_0, y_0) + (x, y)) - f(x_0, y_0)) \\ &= (x, df_{x_0,y_0}(x, y) + \|(x, y)\|\theta(x, y)) \end{aligned}$$

On pose alors $\Theta(x, y) = (0, \theta(x, y))$ et $\mathcal{L}(x, y) = (x, df_{x_0,y_0}(x, y))$. L'égalité précédente se réecrit alors

$$\Phi((x, y) + (x_0, y_0)) = \Phi(x_0, y_0) + \mathcal{L}(x, y) + \|(x, y)\|\Theta(x, y).$$

On montre alors que $\mathcal{L}$ est linéaire continue et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Theta(x,y) = 0$ (ceci est laissé en exercice). Donc Φ est différentiable en (x_0, y_0) et sa différentielle en (x_0, y_0) est $\mathcal{L}$.

De même, en tout point $(u,v) \in U \times V$, on montre que Φ est différentiable et que $d\Phi_{(u,v)}(x,y) = (x, df_{(u,v)}(x,y))$ pour $(x,y) \in E \times F$. Comme df est continue (car f est C^1), on montre que $d\Phi$ est continue (laissé en exercice), et donc Φ est C^1.

Montrons que $\mathcal{L} = d\Phi_{(x_0,y_0)}$ est un isomorphisme. Comme on est en dimension infinie, on ne peut pas se contenter de considérer le noyau. Soient $(x,y) \in E \times F$ et soient $(x', y') \in E \times G$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x,y) = (x', y') \quad &\Leftrightarrow \quad (x, df_{x_0,y_0}(x,y)) = (x', y')) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x' \\ df_{x_0,y_0}(x,y) = y' \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x' \\ df_{x_0,y_0}(0,y) = y' - df_{x_0,y_0}(x',0) \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x' \\ L(y) = y' - df_{x_0,y_0}(x',0) \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x' \\ y = L^{-1}(y' - df_{x_0,y_0}(x',0)) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

où L est donnée dans l'énoncé du TFI. Du coup, $\mathcal{L}$ est bijective et

$$\mathcal{L}^{-1}(x', y') = (x', L^{-1}(y' - df_{x_0,y_0}(x',0)) \ \forall (x', y') \in E \times G.$$

Comme L, L^{-1} et df_{x_0,y_0} sont continues, on obtient que $\mathcal{L}$ est un isomorphisme continu de réciproque continue. On applique donc le TIL en (x_0, y_0): il existe $U_1 \subset E$, $V_1 \subset F$ et $W_1 \subset E \times G$ trois ouverts tels que $x_0 \in U_1$, $y_0 \in V_1$ et $\Phi(x_0, y_0) = (x_0, 0) \in W_1$ et $\Phi : U_1 \times V_1 \to W_1$ est un C^1-difféomorphisme. On pose alors

$$U_0 := \{x \in U_1 \text{ tel que } (x,0) \in W_1\}$$

Alors U_0 est un ouvert (exercice). On définit la projection:

$$\begin{array}{rccc} \pi_2 : & U_1 \times V_1 & \to & V_1 \\ & (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

et on pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U_0 & \to & V_1 \\ & x & \mapsto & \pi_2 \circ \Phi^{-1}(x,0) \end{array}$$

Cette application est bien définie et elle est C^1 comme composée. Soit $(x,y) \in U_0 \times V_1$: on a alors

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x,y) = (x,0) \Leftrightarrow (x,y) = \Phi^{-1}(x,0) \Leftrightarrow y = \pi_2 \circ \Phi^{-1}(x,0)$$

(la dernière équivalence est laissée en exercice). Du coup, $f(x,y) = 0$ ssi $y = \varphi(x)$ et le théorème est démontré.

8. Exemple d'utilisation en dimension infinie

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \text{ et } |f'(x) - f'(y)| \leq C|x-y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

On s'intéresse au problème suivant: pour $\lambda \in \mathbb{R}$ assez petit, existe-t'il une fonction $u \in C^2([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} u''(t) = \lambda f(u(t)) & \text{pour tout } t \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Les théorèmes usuels sur les équations différentielles ne fonctionnent pas dans ce contexte. Pour $\lambda = 0$, on sait qu'on a une solution unique: on va utiliser le TFI pour montrer qu'il en existe pour λ petit.

Soit

$$E = \{u \in C^2([0,1]) / \, u(0) = u(1) = 1\}.$$

On munit E de la norme

$$\|u\| := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$$

pour $u \in E$. C'est bien une norme (exercice). On pose l'application

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} \times E & \to & C^0([0,1]) \\ & (\lambda, u) & \mapsto & u'' - \lambda f(u) \end{array}$$

Où, par définition, $f(u)$ est la fonction $f \circ u$, qui est donc continue. Ici, on munit $C^0([0,1])$ de $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathbb{R}\times$ de la norme produit vue au **6.a.** $N(\lambda, u) = |\lambda| + \|u\|$. Munis de ces normes, $\mathbb{R}$, E et $C^0([0,1])$ sont bien des espaces de Banach (exercice).

Résoudre notre problème revient à trouver u tel que $F(\lambda, u) = 0$, et c'est exactement ce que donnera le TFI.

Étape 1: Différentiabilité de F. Soient $(\lambda_0, u_0), (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E$.

$$\begin{aligned} &F((\lambda_0, u_0) + (\lambda, u)) - F(\lambda_0, u_0) = u'' - (\lambda_0 + \lambda) f(u_0 + u) + \lambda_0 f(u_0) \\ &= u'' - \lambda f(u_0 + u) - \lambda_0 (f(u_0 + u) - f(u_0)) \\ &= u'' - \lambda f(u_0) - \lambda_0 f'(u_0) u - \lambda (f(u_0 + u) - f(u_0)) - \lambda_0 (f(u_0 + u) - f(u_0) - u f'(u_0)) \end{aligned}$$

Posons $L(\lambda, u) = u'' - \lambda f(u_0) - \lambda_0 f'(u_0) u$ et

$$\theta(\lambda, u) = \frac{-\lambda (f(u_0 + u) - f(u_0)) - \lambda_0 (f(u_0 + u) - f(u_0) - u f'(u_0))}{N(\lambda, u)}$$

Étape 1.1: Montrons que $\lim_{(\lambda,u)\to(0,0)} \theta(\lambda, u) = 0$. Attention, $\theta(\lambda, u) \in C^0([0,1])$, il faut donc prendre la norme infinie. Soit $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} &|\left[-\lambda (f(u_0 + u) - f(u_0)) - \lambda_0 (f(u_0 + u) - f(u_0) - u(t) f'(u_0))\right](t)| \\ &\leq |\lambda| |f(u_0(t) + u(t)) - f(u_0(t)))| + |\lambda_0| \cdot |f(u_0(t) + u(t)) - f(u_0(t)) - u(t) f'(u_0(t))| \\ &\leq |\lambda| \times C \times |u(t)| + |\lambda_0| |f(u_0(t) + u(t)) - f(u_0(t)) - u(t) f'(u_0(t))| \end{aligned}$$

Utilisons le théorème des accroissements finis: pour tout $t \in [0,1]$, il existe $c(t) \in]0,1[$ tel que $f(u_0(t) + u(t)) - f(u_0(t)) = u(t) f'(u_0(t) + c(t) u(t))$, et donc

$$\begin{aligned} |f(u_0(t) + u(t)) - f(u_0(t)) - u(t) f'(u_0(t))| &= |u(t)| \times |f'(u_0(t) + c(t) u(t)) - f'(u_0(t))| \\ &\leq |u(t)| \times C \times |c(t)| \times |u(t)| \leq C \times |u(t)|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
&|\,[-\lambda(f(u_0+u)-f(u_0))-\lambda_0(f(u_0+u)-f(u_0)-uf'(u_0))]\,(t)|\\
&\leq |\lambda||f(u_0(t)+u(t))-f(u_0(t)))|+|\lambda_0|\cdot|f(u_0(t)+u(t))-f(u_0(t))-u(t)f'(u_0(t))|\\
&\leq |\lambda|\times C\times|u(t)|+|\lambda_0|C\times|u(t)|^2\\
&\leq |\lambda|\times C\times\|u\|_\infty+|\lambda_0|C\times\|u\|_\infty^2\\
&\leq C\times N(\lambda,u)^2+C\times|\lambda_0|\times N(\lambda,u)^2
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout t, on obtient alors

$$\|\theta(\lambda,u)\|_\infty\leq C\times N(\lambda,u)+C\times|\lambda_0|\times N(\lambda,u)$$

et du coup,

$$\lim_{(\lambda,u)\to(0,0)}\theta(\lambda,u)=0.$$

Étape 1.2: montrons que L est linéaire continue. La linéarité est évidente. Pour la continuité, soit $t\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}
|L(\lambda,u)(t)| &= |u''(t)-\lambda f(u_0(t))-\lambda_0 f'(u_0(t))u(t)|\\
&\leq |u''(t)|+|\lambda|\times|f(u_0(t))|+|\lambda_0|\times|f'(u_0(t))|\times|u(t)|\\
&\leq \|u\|+M\times|\lambda|+M\times|\lambda_0|\times\|u\|_\infty\\
&\leq (1+M+M\cdot|\lambda_0|)\cdot N(\lambda,u)
\end{aligned}$$

pour tout t. Du coup, $\|L(\lambda,u)\|_\infty\leq(1+M+M\cdot|\lambda_0|)\cdot N(\lambda,u)$ et L est donc continue.

Ceci prouve que F est différentiable en tout point et que

$$dF_{(\lambda_0,u_0)}(\lambda,u)=u''-\lambda f(u_0)-\lambda_0 f'(u_0)u\,\forall(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times E.$$

Étape 2: Montrons qu'elle est C^1, cad que la différentielle est continue. Soient $(\lambda_0,u_0),((\lambda_1,u_1),(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times E$.

$$\begin{aligned}
&(dF_{(\lambda_1,u_1)}-dF_{(\lambda_0,u_0)})(\lambda,u)=-\lambda(f(u_1)-f(u_0))-(\lambda_1 f'(u_1)-\lambda_0 f'(u_0))u\\
&=-\lambda(f(u_1)-f(u_0))-\lambda_0(f'(u_1)-f'(u_0))u-(\lambda_1-\lambda_0)f'(u_1)u
\end{aligned}$$

En procédant comme plus haut, on montre alors que

$$\begin{aligned}
&\|(dF_{(\lambda_1,u_1)}-dF_{(\lambda_0,u_0)})(\lambda,u)\|_\infty\\
&\leq|\lambda|\cdot C\cdot\|u_1-u\|_\infty+|\lambda_0|\cdot C\cdot\|u_1-u\|_\infty\times\|u\|_\infty+|\lambda_1-\lambda_0|\times M\times\|u\|_\infty\\
&\leq(C(1+|\lambda_0|)\cdot\|u_1-u\|_\infty+|\lambda_1-\lambda_0|\times M)\times N(\lambda,u)
\end{aligned}$$

et donc

$$|||dF_{(\lambda_1,u_1)}-dF_{(\lambda_0,u_0)}|||\leq C(1+|\lambda_0|)\cdot\|u_1-u\|+M|\lambda_1-\lambda_0|$$

et donc,

$$\lim_{(\lambda_1,u_1)\to(\lambda_0,u_0)}dF_{(\lambda_1,u_1)}=dF_{(\lambda_0,u_0)}.$$

Donc la fonction F est C^1.

En $(0,0)$, on a $dF_{(0,0)}(\lambda,u)=u''$ pour $(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times E$. On pose

$$\begin{array}{cccc}
L: & E & \to & C^0([0,1])\\
 & u & \mapsto & dF_{(0,0)}(0,u)=u''
\end{array}$$

Étape 3: bijectivité de L. Soit $f \in C^0([0,1])$ et soit $u \in E$. Supposons que $L(u) = f$, cad $u'' = f$. Dans ce cas, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $u'(t) = \int_0^t f(x)\,dx + A$, et donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(t) = \int_0^t \left(\int_0^s f(x)\,dx \right) ds + At + B \ \forall t \in [0,1]$$

or $u(0) = u(1) = 0$, donc $B = 0$ et $\int_0^1 \left(\int_0^s f(x)\,dx \right) ds + A = 0$. Il vient donc que

$$u(t) = \int_0^t \left(\int_0^s f(x)\,dx \right) ds - t \left(\int_0^1 \left(\int_0^s f(x)\,dx \right) ds \right)$$

pour tout $t \in [0,1]$. Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} T: & C^0([0,1]) & \to & E \\ & f & \mapsto & T(f) \end{array}$$

avec $T(f)(t) = \int_0^t (\int_0^s f(x)\,dx)\,ds - t \left(\int_0^1 (\int_0^s f(x)\,dx)\,ds \right)$ pour tout $t \in [0,1]$. On vérifie sans difficulté que T est linéaire et que $T \circ L = Id_E$ et $L \circ T = Id_{C^0([0,1])}$.

Étape 4: Continuité de L et L^{-1}. On a

$$\begin{array}{rcl} |T(f)(t)| & = & \left| \int_0^t \left(\int_0^s f(x)\,dx \right) ds - t \left(\int_0^1 \left(\int_0^s f(x)\,dx \right) ds \right) \right| \\ & \leq & \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x)|\,dx \right) ds + \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x)|\,dx \right) ds \leq 2\|f\|_\infty \end{array}$$

et donc $\|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$. De même,

$$\begin{array}{rcl} |T(f)'(t)| & = & \left| \int_0^t f(x)\,dx - \int_0^1 \left(\int_0^s f(x)\,dx \right) ds \right| \\ & \leq & \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 \int_0^1 |f(x)|\,dx)\,ds \leq 2\|f\|_\infty \end{array}$$

et donc $\|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$. Pour finir, $\|T(f)''\|_\infty = \|f\|_\infty$. Finalement,

$$\|T(f)\| \leq 5\|f\|_\infty$$

et donc T est continue. Finalement, L est un isomorphisme bi-continu, et on peut appliquer le TFI.

Donc il existe $U_0 \subset \mathbb{R}$ et $V_0 \subset E$ ouverts tels que $0 \in U_0$ et $0 \in V_0$ et il existe $\varphi \in C^1(U_0, V_0)$ telle que

$$\forall (\lambda, u) \in U_0 \times V_0,\ F(\lambda, u) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(\lambda).$$

En particulier, pour $\lambda \in U_0$, on a $F(\lambda, \varphi(\lambda)) = 0$. Comme $0 \in U_0$ ouvert, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $]-\epsilon_0, \epsilon_0[\subset U_0$. Donc, pour $|\lambda| < \epsilon_0$, on pose $u = \varphi(\lambda)$, donc $F(\lambda, u) = 0$, cad

$$u'' = \lambda f(u) \text{ et } u(0) = u(1) = 0.$$

Du coup, on a résolu notre problème pour λ petit.