

Fonctions Holomorphes, Formule de Cauchy et Lien avec l'analyticité

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On note U le disque unité ouvert.

Définition 1, Holomorphie en un point : f est holomorphe (ou \mathbb{C} -dérivable) en $a \in \Omega$ si $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ possède une limite en a dans $\Omega \setminus \{a\}$. On note cette limite $f'(a)$.

Définition 2, Holomorphie sur un ouvert : f est holomorphe sur Ω si f est holomorphe en tout $a \in \Omega$. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Remarque 1 : f est holomorphe en a revient à voir que f est différentiable en tant que fonction du \mathbb{R} - espace vectoriel \mathbb{C} dans lui-même, sa différentielle étant une similitude directe.

Rappel : Une fonction est dite analytique en un point si elle est développable en série entière en ce point.

Théorème 1, Lien entre holomorphie et analyticité : f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est analytique sur Ω .

Pour montrer le sens le plus délicat de ce résultat, on va avoir besoin d'un résultat important : la formule de Cauchy.

Définition 3, Courbes et Chemins : Une courbe dans un espace topologique X est une application $\gamma : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$. L'intervalle $[\alpha, \beta]$ s'appelle l'intervalle de paramétrisation. Si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, on dit que la courbe est fermée. Un chemin est une courbe continue et C^1 par morceaux.

On pose alors $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$.

Par exemple pour un triangle de sommets a, b, c noté Δ , on a $\int_{\partial\Delta} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$ pour toute fonction f continue sur la frontière de Δ .

Définition 4, Indice en un point par rapport à un chemin fermé : Soit γ un chemin fermé et Ω le complémentaire de $Im(\gamma)$ dans \mathbb{C} . On appelle indice de z par rapport à γ la quantité

$$Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\xi - z} d\xi.$$

Définition 5, Ouvert étoilé : Un ouvert Ω est dit étoilé s'il existe $a \in \omega$ (appelé centre) tel que pour tout $z \in \Omega$, le segment $[a, z]$ est inclus dans Ω .

Théorème 2, Théorème de Cauchy : Soit Ω un ouvert étoilé, $p \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)$. Alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pour tout γ chemin fermé de Ω .

Théorème 3, Formule de Cauchy : Soit Ω un ouvert étoilé, γ un chemin fermé de Ω et $f \in H(\Omega)$.

Soit $z \in \Omega \setminus Im(\gamma)$. Alors $f(z)Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

Remarque 2 : On montre au passage que si Ω est un ouvert convexe, alors toute $f \in H(\Omega)$ possède une primitive.

Corollaire 1, Formule de la moyenne : Soit Ω un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $f \in H(\Omega)$.

Alors $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$ pour tout $0 < r < R$.

Corollaire 2 : Soit Ω un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $f \in H(\Omega)$. On note $\sum a_n(z - z_0)^n$ le

DSE de f en $z = z_0$. Alors $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt$ pour tout $0 < r < R$.

Corollaire 3 : Si $f \in H(\Omega)$, alors $f' \in H(\Omega)$.

Théorème 4, Théorème de Morera : Soit $f \in C(\Omega)$. Alors $f \in H(\Omega)$ si et seulement si $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ pour tout Δ triangle inclus dans Ω .

Théorème 5, Variante du Théorème de Morera : Soit $f \in C(\Omega)$. Alors $f \in H(\Omega)$ si et seulement si $\int_{\partial\Box} f(z) dz = 0$ pour tout \Box rectangle inclus dans Ω et dont les côtés sont parallèles aux axes.

Théorème 6, Théorème de Weierstrass : Soient $f_n \in H(\Omega)$ qui convergent uniformément sur tout les compacts de Ω vers une fonction f . Alors $f \in H(\Omega)$.

Définition 6, Fonction entière : Une fonction entière est une fonction holomorphe de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

Théorème 6, Théorème de Liouville : Toute fonction entière et bornée est constante.

Exercice 1 [Cours] (Relations de Cauchy-Riemann)

1) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ où $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que f est holomorphe en $z_0 = x + iy$ si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ en z_0 .

2) Pour $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x + iy^2$. Montrer que f est \mathbb{R} -différentiable sur \mathbb{C} . Donner sa différentielle. Existe-t-il un ouvert non vide de \mathbb{C} sur lequel f est holomorphe ?

Exercice 2 [Cours] (Analytique \Rightarrow Holomorphe)

Montrer que si f est DSE en $z = 0$, alors f est holomorphe en $z = 0$.

Exercice 3 (Chemins équivalents)

Soient deux courbes $\gamma : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Soit φ une bijection de classe C^1 de $[\alpha_1, \beta_1]$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi(\alpha_1) = \alpha$ et $\varphi(\beta_1) = \beta$. On pose $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$. Montrer que $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$. On parle alors de chemins équivalents.

Exercice 4 (Intégrale sur un chemin)

Soit $\gamma(t) = re^{it}$ et $\gamma_n(t) = (1 - 1/n)\gamma(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. On pose $I = \int_{\gamma} f(z) dz$ et $I_n = \int_{\gamma_n} f(z) dz$. Montrer que $I_n \rightarrow I$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 5 (Indice de z par rapport à γ)

1) Montrer que $Ind_{\gamma}(z)$ est une fonction à valeurs entières sur Ω , constante sur chaque composante connexe de Ω et nulle sur celle qui est non bornée. Pour cela, on posera $\varphi(t) = \exp\left(\int_{\alpha}^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right)$ avec les notations de la définition 3, et on commencera par montrer que $\frac{\varphi}{\gamma - z}$ est constante sur $[\alpha, \beta]$.

2) Soit γ le cercle orienté positivement de centre a et de rayon r . Montrer que $Ind_{\gamma}(z)$ vaut 1 si $|z - a| < r$ et 0 si $|z - a| > r$.

3) Montrer que $Ind_{\gamma}(z)$ reste constant lorsque le chemin fermé γ se déforme continuellement sans passer par z . (Cette question est à rapprocher de la notion d'ouvert simplement connexe et à l'homotopie, voir plus loin. On peut aussi montrer d'autres propriétés, par exemple, que si $Im(\gamma) \subset \Omega'$ ouvert simplement connexe ne contenant pas z , alors $Ind_{\gamma}(z) = 0$).

On passe maintenant à la preuve du Théorème de Cauchy, pour cela on va montrer les étapes intermédiaires suivantes :

Proposition 1, Intégrale d'une dérivée : Soit $F \in H(\Omega)$ telle que $F' \in C(\Omega)$. Alors $\int_{\gamma} F'(z) dz = 0$ pour tout γ chemin fermé dans Ω .

Corollaire 4 : $\int_{\gamma} z^n dz = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $n = -2, -3, \dots$ si $0 \notin Im(\gamma)$.

Proposition 2, Théorème de Cauchy dans un triangle : Soit $p \in \Omega$. Soit Δ un triangle fermé inclus dans Ω . Soit $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)$. Alors $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

Remarque 3 : On montrera plus loin qu'en fait, cela implique que $f \in H(\Omega)$.

Exercice 6 [Cours] (Théorème de Cauchy dans un triangle)

On note a, b, c les sommets de Δ . On pose $J = \int_{\partial\Delta} f(z) dz$.

1) Montrer la Proposition 1 et le Corollaire 4.

2) On commence par le cas où $p \notin \Delta$.

a) En considérant les milieux des segments du bord du triangle, construire un triangle que l'on notera Δ_1 dont l'un des sommets est dans l'ensemble des sommets de Δ et les deux autres sommets sont des milieux et tel que $|\int_{\partial\Delta_1} f(z) dz| \geq J/4$.

b) Construire par récurrence une suite de triangles $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ tels que $|J| \leq 4^n |\int_{\partial\Delta_n} f(z) dz|$.

c) Appliquer la définition de l'holomorphie de f en $z_0 \in \cap \Delta_n$ et en conclure que $J = 0$.

3) Traiter le cas où p est un sommet de Δ .

4) Conclure dans le cas général.

Exercice 7 [Cours] (Théorème de Cauchy et Holomorphe \Rightarrow Analytique)

1) Montrer le Théorème 2 en posant $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi) d\xi$ (existence ?) et en justifiant soigneusement.

2) Montrer le Théorème 3 en utilisant la fonction $g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}$ si $\xi \neq z$ et $f'(z)$ sinon.

3) Soit $D(a, R) \subset \Omega$ et γ le cercle orienté positivement de centre a et de rayon $r < R$. Appliquer le Théorème de Cauchy sur ce cercle pour conclure au Théorème 1.

4) Montrer les Corollaires 1, 2 et 3.

5) Montrer le Théorème de Morera et son corollaire : le Théorème de Weierstrass.

Exercice 8 (Principe de symétrie de Schwarz)

1) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ voisinage ouvert d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} . On pose $\Omega^+ = \{z \in \Omega; \text{Im}(z) > 0\}$ et $\Omega^- = \{z \in \Omega; \text{Im}(z) < 0\}$. Soient $f^+ : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{C}$ et $f^- : \Omega^- \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes qui se prolongent en une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrer que f est holomorphe sur Ω . (On pourra utiliser la variante du Théorème de Morera.)

2) Soient $P = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$ et $f : \overline{P} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur P , réelle sur \mathbb{R} . Montrer que f se prolonge en une fonction entière.

Exercice 9 (Théorème de Liouville et de d'Alembert-Gauss)

1) Soit f analytique en z_0 , il existe donc une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ qui coïncide avec f sur un disque $D(z_0, R)$. Montrer que pour tout $0 < r < R$, on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt = \sum |a_n|^2 r^{2n}$. (On utilise ici le fait que la restriction de la série entière à un cercle de centre z_0 est une série trigonométrique.)

2) Montrer les Inégalités de Cauchy : $|a_n| \leq \frac{\|f\|_{\infty, \overline{D}(0,r)}}{r^n}$ pour tout $0 < r < R$.

3) En déduire le Théorème de Liouville et celui de d'Alembert-Gauss.

Exercice 10 (Croissance polynomiale)

Soit f entière telle que $|f(z)| \leq A + B|z|^a$ pour tout z plus grand en module qu'un certain R , avec $a > 0$. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 11 (Utilisation de la formule de Cauchy)

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$.

1) Montrer que si $|a_n| \leq M$ pour tout n , alors $|f(z)| \leq \frac{M}{1-|z|}$, $|f'(z)| \leq \frac{M}{(1-|z|)^2}$.

2) Montrer que si $|f(z)| \leq M$, alors $|a_n| \leq M$ et $|f'(z)| \leq \frac{M}{1-|z|}$.

Exercice 12 (Intégrale à paramètre de fonctions holomorphes)

1) Montrer que si Ω est un ouvert de \mathbb{C} , $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} et $(t, z) \mapsto f(t, z)$ continue sur $[a, b] \times \Omega$ holomorphe par rapport z pour tout t , alors $z \mapsto \int_a^b f(t, z) dt$ est holomorphe sur Ω .

2) En utilisant le Théorème de Weierstrass, quelle hypothèse faut-il rajouter pour considérer le cas où $b = +\infty$.

Remarque 4 : Dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on a des résultats du style : Soit (X, τ, μ) un espace mesuré, Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que *i)* $\forall z \in \Omega, t \mapsto f(t, z) \in L^1_\mu(X)$, *ii)* p.p. $t \in X, z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe sur Ω , *iii)* pour tout compact K de Ω , il existe $g \in L^1_\mu(X)$ tel que $|f(t, z)| \leq g(t)$, p.p. $t \in X, \forall z \in K$, alors $F(z) = \int_X f(t, z) d\mu(t)$ est holomorphe sur Ω et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) d\mu(t)$.

Zéros isolés, Prolongement analytique et Principe du maximum

Le prolongement analytique permet le passage de certaines propriétés locales au global. Ceci permet par exemple d'étendre certains résultats de \mathbb{R} à \mathbb{C} .

Théorème 8, Principe des zéros isolés : Soit f holomorphe non constante sur un ouvert connexe Ω . Alors les zéros de f forment un ensemble de points isolés.

Théorème 9, Prolongement analytique : Soient f, g holomorphes non constantes sur un ouvert connexe Ω . Si $\{a; f(a) = g(a)\}$ possède un point d'accumulation dans Ω alors $f = g$ dans Ω .

Théorème 10, Principe du maximum : Soit f holomorphe sur un ouvert connexe Ω . Si $|f|$ possède un maximum local dans Ω , alors f est constante.

Exercice 13 [Cours] (Zéros isolés et prolongement analytique)

1) Montrer le principe des zéros isolés en faisant un développement limité au voisinage d'un éventuel point d'accumulation.

2) Montrer le théorème du prolongement analytique.

3) Montrer le principe du maximum en utilisant la question 1 de l'exercice 8.

Exercice 14 (Extension de relations)

1) En partant du fait que $e^{x+y} = e^x e^y$ sur \mathbb{R} , étendre de façon très simple cette relation sur \mathbb{C} .

2) Fonction Eta de Dedekind : Soit $\eta(z) = e^{i\pi z/12} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi n z})$. On verra dans une feuille ultérieure comment montrer que η est holomorphe sur $P = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z > 0\}$. On définit $\sqrt{\cdot}$ sur P comme l'application holomorphe réciproque de $z \mapsto z^2$ de P dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire par $\sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ pour $r > 0$ et $0 < \theta < 2\pi$. Montrer que pour tout $z \in P$, $\eta(z+1) = e^{i\pi/12}\eta(z)$ et $\eta(-1/z) = e^{-i\pi/4}\sqrt{z}\eta(z)$. (Pour la seconde formule, on commencera par montrer la formule pour $z = ix$ avec $x > 0$ et posant $F(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-2\pi n x})^{-1}$ pour $x > 0$, on admettra la relation fonctionnelle $e^{\pi x/12} F(x) = \sqrt{x} e^{\pi/(12x)} F(1/x)$.)

Exercice 15 (Lemme de Schwarz)

Soit $f \in H(D(0,1))$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in D(0,1)$.

1) Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0,1)$.

2) Montrer que s'il existe z_0 tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe λ tel que $f(z) = \lambda z$.

Exercice 16 (Transformation de Koebe)

Soit $\alpha \in U$ et $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$.

1) Montrer que φ_α est une bijection holomorphe de U dans U . Calculer $\varphi'_\alpha(0)$ et $\varphi'_\alpha(\alpha)$.

2) Soient $f : U \rightarrow U$ et $\alpha \in U$. On pose $\beta = f(\alpha)$. Montrer que $|f'(\alpha)| \leq \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$. (On posera $g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$.)

Exercice 17 (Existence d'un zéro)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} qui contient U . Soit $f \in H(\Omega)$ tel que $f(0) = 1$ et $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f possède au moins un zéro dans U .

Exercice 18 (Une différence entre C^∞ pour \mathbb{R} et \mathbb{C})

Montrer qu'il n'existe qu'une seule fonction holomorphe telle que $f(1/n) = 1/n^2$ pour n assez grand. Montrer que par contre, il existe une infinité de fonctions réelles C^∞ qui vérifient cette condition.

Exercice 19 (Application des zéros isolés/prolongement analytique)

Soit f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω qui ne s'annulent pas. Soit (a_n) une suite de complexes 2 à 2 distincts qui converge dans Ω telle que $f'(a_n)g(a_n) = f(a_n)g'(a_n)$ pour tout n . Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f = cg$.

Singularités, Développement de Laurent et Théorème des résidus

Définition 7, Singularités : Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. On suppose que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ et que f est holomorphe que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Alors on dit que z_0 est une singularité pour f .

Théorème 11 et Définition 8, Classification des singularités : Soit Ω un ouvert connexe et $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Alors on a l'un des cas suivants:

a) f peut être définie en z_0 de sorte que la fonction prolongée soit holomorphe. On parle alors d'une singularité artificielle.

b) Il existe des complexes c_1, \dots, c_m avec $c_m \neq 0$ tels que $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ a une singularité artificielle en z_0 . On parle alors d'une singularité isolée, appelée pôle d'ordre m et pour laquelle $\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ désigne la partie principale de f en z_0 . f est dite méromorphe en z_0 .

c) Il existe $r > 0$ avec $D(z_0, r) \subset \Omega$ tel que $Imf(\overline{D(z_0, r)})$ est dense dans \mathbb{C} . On parle alors d'une singularité essentielle.

Corollaire 5 et Définition 9, Développement de Laurent en une singularité isolée et Résidu: Dans les cas b) et c), on a l'existence d'une unique g entière, nulle en 0 telle que z_0 soit une singularité artificielle pour $z \mapsto f(z) - g\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$. Si g est un polynôme, on est dans le cas b).

Le résidu de f en z_0 est le premier coefficient du développement de g en z_0 :

$$g\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \frac{Res(f, z_0)}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots$$

Remarque 5 : Dans le cas d'une fraction $f(z) = P(z)/Q(z)$ avec P et Q deux fonctions holomorphes, et pour z_0 un pôle simple, on a $Res(f, z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$.

Dans le cas d'un pôle d'ordre m , on a la formule $Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$.

Théorème 12, Théorème des résidus : Soit Ω un ouvert étoilé, f holomorphe sur $\Omega \setminus (\cup_{i=1, \dots, n} \{a_i\})$, alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum Res(f, a_i) Ind_{\gamma}(a_i)$ pour chemin γ dans Ω ne rencontrant pas les a_i .

Remarque 6 : le Théorème des résidus se généralise aux ouverts étoilés et plus généralement aux ouverts simplement connexes, c'est-à-dire aux ouverts pour lesquels toute courbe fermée est homotope à 0 dans Ω . On dit que deux chemins γ_1 et γ_2 sont homotopes s'il existe $h : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ continue telle que $h(0, t) = \gamma_1(t)$, $h(1, t) = \gamma_2(t)$ et $h(s, 0) = h(s, 1)$. (C'est-à-dire que γ_1 se "déforme" continuellement en γ_2 dans Ω .) On dit que le chemin γ_1 est homotope à 0 si γ_1 est homotope à un chemin dont l'image est réduit à un point. Il existe des propriétés équivalentes à la propriété d'être un ouvert simplement connexe :

a) $\forall f \in H(\Omega)$, $\forall \gamma$ chemin fermé dans Ω , alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. (Cette propriété n'est rien d'autre que le théorème de Cauchy, les ouverts simplement connexes peuvent donc être défini comme les ouverts sur lequel le théorème de Cauchy est vrai. Comme c'est le théorème de Cauchy qui est sous-jacent à toutes les preuves, c'est bien le cadre optimal pour une telle étude).

b) Ω est homéomorphe à U .

c) Toute $f \in H(\Omega)$ possède une primitive holomorphe.

d) Toute $f \in H(\Omega)$ possède un logarithme holomorphe.

de Toute $f \in H(\Omega)$ possède une racine carrée holomorphe.

Remarque 7 : On peut aussi en se plaçant sur la sphère de Riemann $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire en rajoutant à \mathbb{C} un "point à l'infini", obtenir l'énoncé suivant : Soit f méromorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} . On note P l'ensemble des pôles de f . Si pour tout chemin fermé de $\Omega \setminus P$, on a $Ind_{\gamma}(z) = 0$

pour tout $z \in S^2 \setminus \Omega$, alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{a \in P} Res(f, a) Ind_{\gamma}(a)$.

Définition 10, Développement en série de Laurent (général) : Soit $0 < R_1 < R_2$. Dans une couronne $C(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C}; R_1 < |z| < R_2\}$, on appelle série de Laurent une série de la forme $f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ où $f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est holomorphe sur $B(0, R_2)$ et $f_2(1/z) = \sum_{n > 0} a_{-n} z^n$ est holomorphe sur $B(0, 1/R_1)$. Une fonction complexe f sur $C(R_1, R_2)$ est dite développable en série de Laurent s'il existe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ qui coïncide avec f sur cette couronne.

Exercice 20 (Pôles et résidus)

1) Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.

a) Si $f = g/h$ avec $g, h \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$ et a zéro simple de h , alors $\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

b) Si $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ avec $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$, alors $\text{Res}(f, a) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$.

c) Calculer les résidus aux pôles de $f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z(z^2 + 1)^2}$.

2) Soit $f(z) = \frac{2}{4z - z^2 - 1}$. Calculer les résidus de f . Calculer de deux façons $\int_{\gamma} f(z) dz$ avec $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ pour en déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos t} dt$.

Exercice 21 (Théorème des résidus)

1) Montrer le théorème 12 en considérant $f - \sum Q_i$ où les Q_i sont les parties principales de f aux pôles a_i .

2) Quelle est la conséquence de la question 3 de l'exercice 4 sur le calcul des $\text{Ind}_{\gamma}(a_i)$?

Exercice 22 (Théorème des singularités isolées de Riemann)

Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. On suppose que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ et que f est holomorphe que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Si f est bornée au voisinage de z_0 , alors z_0 est une singularité artificielle pour f .

Exercice 23 [Dvlpt] (Existence d'une singularité essentielle)

Précisons la notion de singularité dans le cas du bord de l'ensemble. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ analytique dans U avec un rayon de convergence $R = 1$. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$. Le point a est dit régulier s'il existe un disque $D(a, r)$ tel que f admette un prolongement analytique sur $U \cap D(a, r)$, sinon on parle d'une singularité essentielle.

1) Montrer que si $a_n \geq 0$ pour tout n , alors f a une singularité essentielle en 1.

2) On cherche à montrer que f possède au moins une singularité essentielle sur le cercle unité. Pour cela, on raisonne par l'absurde.

a) Montrer qu'il existe alors N disques $D(a_i, r_i)$ tels que f admet un prolongement analytique f_i à $U \cap D(a_i, r_i)$ et $\cup D(a_i, r_i)$ recouvre le cercle unité.

b) Obtenir alors un prolongement analytique de f sur $V = U \cup (\cup D(a_i, r_i))$.

c) Conclure.

3) Est-ce qu'il existe un lien d'implication entre les deux propriétés : z_0 est une singularité essentielle et $f(z_0)$ diverge ?

4) Montrer que $\sum z^{2^n}$ a tous les points du cercle unité comme singularité essentielle..

Exercice 24 (Calcul d'intégrales à l'aide du Théorème des résidus)

1) En appliquant le Théorème des résidus au domaine délimité par les segments $[0, R]$, $[0, Re^{2i\pi/n}]$ et l'arc $\{Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\}$, calculer $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$ pour $n \geq 2$.

2) Calculer $\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\cosh x + \cosh a} dx$ en intégrant la fonction $e^{i\alpha z}/(\cosh z + \cosh a)$ le long du périmètre du rectangle ayant pour sommets $\pm R$, $\pm R + 2i\pi$.

3) Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. (Utiliser e^{iz}/z .)

Exercice 25 (Prolongement et pôles)

1) Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ est uniformément convergente sur tout compact de l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et que sa somme $f(z)$ est holomorphe sur Ω .

2) Pour $z \in \Omega$, on pose $h(z) = f(z) - \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$. Montrer que h est la restriction à Ω d'une fonction holomorphe H sur \mathbb{C} qui vérifie $H(z+1) = H(z)$. Calculer $\lim_{y \rightarrow \infty} H(x+iy)$ et en déduire que $H = 0$.

3) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 26 (Développements en série de Laurent)

1) On veut montrer que toute fonction holomorphe sur $\Omega = C(R_1, R_2)$ est développable en série de Laurent dans cette couronne.

Soit $f \in H(\Omega)$.

a) Soit $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, on note pour $i = 1, 2$, γ_i le cercle de centre 0 et de rayon r_i . Alors pour tout z tel que $r_1 < |z| < r_2$, on a $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right)$.

b) En déduire que l'on peut décomposer f de façon unique sous la forme $f(z) = f_1(z) + f_2(1/z)$ avec $f_1 \in H(|z| < R_2)$ et $f_2 \in H(|z| < 1/R_1)$, $f_2(0) = 0$.

c) En déduire qu'il existe (a_n) telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge dans Ω et vaut $f(z)$

2) Qu'en est-il de l'unicité du développement en série de Laurent ?

3) Donner le développement de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ sur $D(0, 1)$, sur $C_1 = \{1 < |z| < 3\}$ et $C_2 = \{3 < |z|\}$, puis de $g(z) = \frac{1}{1-z} e^{1/z}$ sur $C_3 = \{1 < |z|\}$ et $C_4 = \{0 < |z| < 1\}$.

Compléments

Exercice 27 (Phragmen-Lindelöf)

1) Soit f une fonction holomorphe au voisinage de la bande $Q = \{x + iy; |y| \leq \pi/2\}$ vérifiant

i) $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x \pm i\pi/2)| \leq 1$,

ii) $\exists A > 0, \alpha < 1$, tels que $\forall z \in Q, |f(z)| \leq \exp(A \exp(\alpha \operatorname{Re} z))$.

On veut montrer que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in Q$. Pour $\varepsilon > 0, \alpha < \beta < 1$, on pose $h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z}))$.

a) Vérifier que $|h_\varepsilon(z)| \leq 1$ pour $z \in Q$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} h_\varepsilon(x + iy) f(x + iy)$.

d) Montrer que $|h_\varepsilon(z) f(z)| \leq 1$ pour $z \in Q$. (Utiliser le principe du maximum sur $Q \cap \{|x| \leq R\}$). Conclure.

2) Montrer que l'hypothèse $\alpha < 1$ ne peut être affaiblie (utiliser $f(z) = \exp(\exp(z))$).

Exercice 28 (Fonction ζ de Riemann)

Soit $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$. Montrer que holomorphe sur $\{\operatorname{Re} z > 1\}$.

Remarque 8 : Ceci est un cas particulier des séries de Dirichlet. La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe admettant un unique pôle simple en 1. On sait aussi que $-2, -4, -6, \dots$ sont des zéros de la fonction ζ et que les autres sont dans la bande $0 < \operatorname{Re} z < 1$. La conjecture de Riemann est que tous ces zéros sont en fait sur la droite $\operatorname{Re} z = 1/2$. (On sait déjà qu'il y en a une infinité dessus.) On étudiera aussi le prolongement de la fonction Γ au plan complexe.

Théorème 13, Théorème de Montel : Soient $f_n \in H(\Omega)$ une famille uniformément bornée sur tout compact de Ω (appelée une famille normale). Alors on peut extraire une sous-suite de fonctions holomorphes qui convergent uniformément sur tout compact.

Remarque 9 : Ce résultat se démontre à l'aide du théorème d'Ascoli et des inégalités de Cauchy. Une séance de développement est prévue dessus.

Exercice 29 (Application du Théorème de Montel)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{C} . Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega$ holomorphe possédant au moins un point fixe a .

1) Montrer que les composées successives de f forment une famille normale. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.

2) Montrer que si $f'(a) = 1$, alors $f = Id$.

3) Montrer que si $|f'(a)| = 1$, alors f est une bijection de Ω dans Ω .

Les énoncés suivants sont donnés à titre culturel, voir Rudin pour plus de détails :

Théorème 14, Théorème de Rouché : Soit $f, h \in H(\Omega)$ et $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ tels que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ si $|z - a| = r$. Alors f et g ont le même nombre de zéros dans $D(z_0, r)$. (Comptés avec leur multiplicité.)

Théorème 15, Réciproque holomorphe : Soit Ω un ouvert connexe, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ avec $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe V et W des voisinages ouverts de z_0 et w_0 tel que f est une bijection de V sur W . Si g est définie par $g(f(z)) = z$, on a alors $g \in H(W)$.

Définition 11, Ouverts conformément équivalents : Les deux ouverts Ω_1 et Ω_2 sont dit conformément équivalents s'il existe $\varphi \in H(\Omega_1)$ bijection de Ω_1 sur Ω_2 . (Alors par le théorème 15, φ^{-1} est aussi holomorphe.)

Théorème 16, Théorème de l'application conforme de Riemann : Tout ouvert connexe simplement connexe non vide (autre que le plan lui-même) est conformément équivalent au disque unité ouvert.

On peut aussi s'intéresser aux fonctions harmoniques (équivalence avec propriété de la moyenne, noyau de Poisson et problème de Dirichlet). (Voir Rudin)

Annexe : Exp, Log, ... complexes

On définit sur \mathbb{C} , $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ homomorphisme analytique et surjectif de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans (\mathbb{C}, \times) .

On définit alors les fonctions réelles \cos et \sin par $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$. Ceci permet de définir \tan et les fonctions réciproques.

On pose maintenant, pour $z = x + iy$ de module 1 avec $x \neq -1$, $\Theta(z) = 2\text{Arctan}\left(\frac{y}{x+1}\right)$. La fonction Θ est une bijection continue telle que $\exp(i\Theta(z)) = z$ pour tout $z \in S^1 \setminus \{1\}$.

La fonction $\text{Arg} : z \mapsto \Theta\left(\frac{z}{|z|}\right)$ est la détermination principale de l'argument sur \mathbb{C}^* .

Si $\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \in]-\pi, \pi[$, alors on a $\text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$.

On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et sur Ω , on définit la détermination principale du log complexe selon : $\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i\text{Arg}(z)$. Cette fonction est une bijection holomorphe de Ω dans $\{x + iy; x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$.

On peut définir aussi les fonctions \cos et \sin complexes selon $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Attention, ces fonctions sont très différentes de leur restriction à \mathbb{R} , par exemple, elles sont surjectives.

Bibliographie :

- Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques, ex 5, Rem 7 et de nombreux calculs d'intégrales par les résidus
- Chambert-Loir, Fermigier, Tome 2, ex 8, 14, 15, 23, 26 et 29
- Dolbeault, ex 26
- Pabion, ex 1, 4, 6, 7, 10 et 14
- Pommellet, ex 1, 7, 9, 13 et 28
- Rudin, Analyse réelle et complexe, ex 2, 3, 5, 6, 7, 21, 22, 25 et 27, Th 11 à 16 et Rem 6
- Tauvel, Exercices d'analyse complexe, ex 11, 16, 18, 19, 24 et 26
- Vauthier, Prat, Sujet 1992, ex 14