Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Cours et TD, Année 2007-2008
Intégrale à Paramètre.

Etude de $\int_a^b f(t,x)\,dt$ dans le cadre de l'intégrale de Riemann

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, E un espace de Banach, $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \times U \to E$. On s'intéresse à la régularité de $\Phi : U \to E$ définie par $\Phi(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$.

Th. 1, Résultat de continuité : On suppose que f est continue sur $[a,b] \times U$. Alors Φ est continue sur U.

Th. 2, Résultat de dérivation : On suppose que $n = 1$, que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a,b] \times U$. Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = \int_a^b \partial_x f(t,x)\,dt$ pour tout $x \in U$.

Exercice 1 [Cours, Dvlpt] (Continuité et dérivation dans le cadre de Riemann)

1) On cherche à démontrer le Th. 1.

a) Rappeler la définition de l'uniforme continuité d'une application g entre deux espaces métriques (F,d) et (G,δ).

b) Soit $x \in U$ et V un voisinage compact de x dans U. Conclure en majorant $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|$ pour y assez proche de x dans V.

2) On cherche à démontrer le Th. 2.

a) Rappeler l'inégalité des accroissements finis pour $g : [a,b] \to F$ avec F un e.v.n.

b) Soit $x \in U$ et $\alpha < \beta$ tels que $x \in [\alpha, \beta] \subset U$. Ecrire (après l'avoir justifié) l'uniforme continuité de $\partial_x f$ sur $[a,b] \times [\alpha,\beta]$.

c) A t fixé dans $[a,b]$, on définit $\Gamma_t(y) = f(t,y) - y\partial_x f(t,x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|x-y| \leq \eta$, alors $\|\Gamma_t(x) - \Gamma_t(y)\| \leq \varepsilon |x-y|$ pour tout $t \in [a,b]$.

En déduire une majoration de $\left\| \dfrac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \int_a^b \partial_x f(t,x)\,dt \right\|$ pour h assez petit, et conclure.

Remarque : cet exercice peut servir de développement pour les leçons 208 (Utilisation de la continuité uniforme) et 239 (Intégrale à paramètre).

Exercice 2 (Calcul d'une intégrale)

On pose $G(x,y) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(x \sin^2\theta + y\cos^2\theta)\,d\theta$ pour $x, y > 0$.

a) Calculer les dérivées partielles de G.

b) A y fixé, on pose $F(x) = G(x,y)$. Montrer que F est C^1 sur $]0,+\infty[$ et obtenir que $F(x) = 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + C$ pour $x \neq y$ avec C une constante..

c) En déduire la valeur de $G(x,y)$ pour tout $x, y > 0$.

Exercice 3 (Un exemple classique)

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit $G :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ si $x \neq 0$.

a) Quelle valeur faut-il pour $G(0)$ afin que G soit continue sur $[0,+\infty[$?

b) Exprimer G comme une intégrale dépendant du paramètre x et en déduire que G est C^∞ sur $[0,+\infty[$. Calculer $G^{(n)}(0)$.

Exercice 4 (Calcul de la Gaussienne)

Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définit par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,dt$.

a) Montrer que g est C^1 et en déduire un calcul de $g(x)$ en fonction de $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Etude de $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,dt$ dans le cadre de l'intégrale de Riemann

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach, $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \times U \to E$. Soit $u, v : U \to]a,b[$.

On s'intéresse à la régularité de $\Phi : U \to E$ définie par $\Phi(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,dt$.

Th. 3, Résultat de dérivation : On suppose que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a,b] \times U$. On suppose de plus que u et v sont dérivables.

Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = f(v(x),x)v'(x) - f(u(x),x)u'(x) + \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x f(t,x)\,dt$ pour tout $x \in U$.

Exercice 5 [Cours] (Dérivation avec bornes variables)

a) On cherche à démontrer le Th. 3. Soit $H :]a,b[^2 \times U \to E$ définie par $H(u,v,x) = \displaystyle\int_u^v f(t,x)\,dt$. Etudier les dérivées partielles de H. En déduire que H est différentiable sur $]a,b[^2 \times U$.

b) On pose $\theta(x) = (u(x), v(x), x)$. Exprimer Φ' en fonction de dH, θ et θ' et conclure.

c) Exemple : Calculer la dérivée de $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} u(xt)\,dt$ avec u de classe C^1.

Exercice 6 (Exemple d'application)

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$. Pour cela, on posera $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$ que l'on dérivera sur $]0,1[$ et on étudiera la limite de $F(x)$ en 1.

Etude de $\displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$ pour une intégrale généralisée

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, E un espace de Banach, $[a,b] \subset]-\infty, +\infty]$ et $f : [a,b[\times U \to E$. (On peut faire des études semblables pour $f :]a,b] \times U \to E$ avec $[a,b] \subset [-\infty, +\infty[$ et $f :]a,b[\times U \to E$ avec $[a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$.)

On s'intéresse à la régularité de $\Phi : U \to E$ définie par $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$.

Th. 4, Résultat de continuité (via CVU) : On suppose que f est continue sur $[a,b[\times U$ et que pour tout compact K de U, $\int_a^\beta f(t,x)\,dt$ converge vers $\Phi(x)$ uniformément sur K quand $\beta \to b$.
Alors Φ est continue sur U.

Th. 4 bis, Résultat de continuité (via Domination) : On suppose que f est continue sur $[a,b[\times U$ et qu'il existe une fonction positive g telle que $\int_a^b g$ converge et vérifiant $\|f(t,x)\| \leq g(t)$, $\forall (t,x) \in [a,b[\times U$.
Alors Φ est bien définie et est continue sur U.

Th. 5, Résultat de dérivation (via CVU) : On suppose que $n = 1$, que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a, b[\times U$. On suppose que pour tout $x \in U$, $\Phi(x)$ converge et que pour tout compact K de U, $\int_a^\beta \partial_x f(t, x)\, dt$ converge uniformément sur K quand $\beta \to b$.

Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = \displaystyle\int_a^b \partial_x f(t, x)\, dt$ pour tout $x \in U$.

Th. 5 bis, Résultat de dérivation (via Domination) : On suppose que $n = 1$, que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a, b[\times U$. On suppose que pour tout $x \in U$, $\Phi(x)$ converge et qu'il existe une fonction positive g telle que $\int_a^b g$ converge et vérifiant $\|\partial_x f(t, x)\| \leq g(t),\ \forall (t, x) \in [a, b[\times U$.

Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = \displaystyle\int_a^b \partial_x f(t, x)\, dt$ pour tout $x \in U$.

Remarque : On a rarement des majorations par une fonction g valables sur tout U. Comme la continuité et la dérivation sont des propriétés locales, il suffit d'avoir cette majoration localement pour conclure.

Exercice 7 [Cours, Dvlpt] (Continuité et dérivabilité pour les intégrales généralisées à paramètre)

1) On cherche à démontrer les théorèmes 4 et 4bis.

a) Montrer le théorème 4.
b) On se place maintenant dans les hypothèses du théorème 4 bis. Montrer que Φ est bien définie sur U.
c) Pour $b_n \to b$ avec $a < b_n < b$, montrer que $\displaystyle\int_a^{b_n} f(t, x)\, dt$ converge uniformément sur U vers $\displaystyle\int_a^b f(t, x)\, dt$ et conclure.

2) Montrer de même les théorème 5 et 5 bis.

Exercice 8 (Calcul d'une intégrale)

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1 + t^2)}\, dt$.

a) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F''(x) - F(x)$ est constante pour $x > 0$.

b) En déduire $F(x)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1 + t^2}\, dt$.

Exercice 9 (Calcul d'une intégrale II)

Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\, dt$.

a) Montrer que G est bien définie, puis que G est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer $G'(x)$.

b) En déduire la valeur de G, puis celle de $I(a, b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$ pour $a, b > 0$.

Remarque : l'intégrale $I(a, b)$ peut aussi se calculer à l'aide de la première formule de la moyenne (voir Gourdon).

Exercice 10 (Calcul d'une intégrale III)

Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\, dt$. (Etudier F'.)

Exercice 11 (Avec Cauchy uniforme)

Pour $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ décroissante, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{ixt^2} f(t)\, dt$. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 12 [Dvlpt] (Fonction Gamma)

On pose $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$. Montrer que Γ est bien définie et C^∞ sur $]0,+\infty[$.

Remarque 1 : c'est une fonction ultra classique qu'il faut connaitre. Il nécessaire de savoir montrer les propriétés suivantes : $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ *pour* $x>0$, Γ *est convexe,* $\ln\Gamma$ *est convexe,* $\Gamma(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\dfrac{1}{x}$, *il existe* $c\in]1,2[$ *tel que* $\Gamma'(c)=0$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, *allure du graphe de* Γ.

Remarque 2 : Le d'eveloppement issu de cette feuille consiste en la preuve du 2) de l'exercice 1 du 2) de l'exercice 7 et de l'exercice 12. Il est bien de savoir montrer les propriétés de la remarque 1 pour tout développement qui concerne la fonction Γ.

<u>Etude de</u> $\displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$ <u>dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue</u>

On rappelle les résultats suivants qui sont des conséquences du théorème de convergence dominée.

Soit (X,d) un espace métrique, $x_0\in X$, $(T,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré et $f:T\times X\to\mathbb{R}$.
On s'intéresse à la régularité de $\Phi:X\to\mathbb{R}$ définie par $\Phi(x)=\displaystyle\int_T f(t,x)\,d\mu(t)$.

Th. 6, Résultat de continuité : On suppose que
$i)$ pour tout $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est $\mu-$ intégrable,
$ii)$ pour presque tout $t\in T$, f est continue au point x_0 par rapport à la variable x,
$iii)$ il existe $g\in L^1_\mu$ tel que $|f(t,x)|\le g(t),\ \forall x\in X$, p.p. $t\in T$.
Alors Φ est continue en x_0.

Th. 7, Résultat de dérivation : On suppose que X est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et que
$i)$ pour tout $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est $\mu-$ intégrable,
$ii)$ pour presque tout $t\in T$, f admet sur X une dérivée partielle en x_0 par rapport à x,
$iii)$ il existe $g\in L^1_\mu$ tel que $|\partial_x f(t,x)|\le g(t),\ \forall x\in X$, p.p. $t\in T$.
Alors $t\mapsto\partial_x f(t,x_0)\in L^1_\mu$, Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0)=\displaystyle\int_T \partial_x f(t,x_0)\,d\mu(t)$.

Exercice 13 (Utilisation de la convergence dominée)

Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2+x}\,dt$.

1) Existence de $F(x)$ sur $]0,+\infty[$? Limite de $F(x)$ en $+\infty$?

2) a) Soit $A>0$. Montrer qu'il existe $\delta>0$ tel que $\displaystyle\int_\delta^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\ge A+1$.

b) Etudier la limite quand $x\to 0^+$ de $\displaystyle\int_\delta^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2+x}\,dt$.

c) Conclure sur la limite de $F(x)$ lorsque $x\to 0^+$.

<u>Etude de</u> $\displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$ <u>pour les fonctions holomorphes</u>

Th. 8 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f:T\times\Omega\to\mathbb{C}$ telle que
$i)$ pour tout $z\in\Omega$, $t\mapsto f(t,z)$ est $\mu-$ intégrable,
$ii)$ pour presque tout $t\in T$, $z\mapsto f(t,z)\in\mathcal{H}(\Omega)$,
$iii)$ pour tout compact K de Ω, il existe $g\in L^1_\mu$ tel que $|f(t,z)|\le g(t),\ \forall z\in K$, p.p. $t\in T$.
Alors $z\mapsto\Phi(z)=\displaystyle\int_T f(t,z)\,d\mu(t)$ est holomorphe sur Ω et $\Phi'(z)=\displaystyle\int_T\partial_z f(t,z)\,d\mu(t)$.

Exercice 14 (Pourquoi hypothèse sans dérivée)

1) Montrer que pour tout compact K de Ω, il existe $\delta > 0$ tel que $K_\delta = \{z \in \mathbb{C}\,,\, d(x, K) \leq \delta\} \subset \Omega$

2) Montrer que pour tout $z \in K$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\partial_z f(t, z)| \leq \frac{1}{\delta} \sup_{w \in K_\delta} |f(t, w)|.$$

(On pensera à la formule de Cauchy.) Que peut-on remarquer ?

__Annexe :__ **Méthode de la phase stationnaire**

On s'intéresse au comportement quand $x \to +\infty$ de la fonction $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\varphi(t)} a(t)\, dt$, où $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Le résultat va dépendre des points où φ' s'annule. En ces points la phase $e^{ix\varphi(t)}$ ne "tourne" plus assez vite pour permettre à l'intégrale de s' "annuler", et ces points vont donc apporter la contribution la plus importante.
1) Dans le cas où il n'y a pas de telles singularités : On suppose donc que $\varphi' \neq 0$ sur le support de a (en dehors l'intégrale est nulle). On montre que dans ce cas pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe C_N tel que, pour $x \geq 1$, $|F(x)| \leq \dfrac{C_N}{x^N}$.
2) Dans le cas d'une singularité : On suppose qu'il existe un unique t_0 dans le support de a tel que $\varphi'(t_0) = 0$ et $\varphi''(t_0) \neq 0$. On montre que dans ce cas il existe $(A_N)_N$ indep. de x tel que, pour tout $N, F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{A_n\, e^{ix\varphi(t_0)}}{x^{n+1/2}} + R_N(x)$, pour $x \geq 1$, avec $|R_N(x)| \leq \dfrac{C_N}{x^{N+3/2}}$, pour $x \geq 1$. En particulier, on a $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{A_0\, e^{ix\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}}$, $\quad A_0 = \dfrac{\sqrt{2\pi} e^{i\,\sigma\pi/4}}{\sqrt{|\varphi''(t_0)|}} a(t_0)$, $\quad \sigma = \operatorname{sgn}(\varphi''(t_0))$.

Ces résultats sont prouvés dans Zuily-Quéffelec et sont techniques (ils utilisent aussi la transformée de Fourier, le prolongement analytique et la formule de Taylor). On va traiter seulement un exemple :

Exercice 15 (Phase stationnaire sur un exemple)

Soit $\alpha \in]0, \sqrt{\pi/2}[$. On s'intéresse au comportement quand $n \to +\infty$ de la fonction $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha e^{in\varphi(t)} a(t)\, dt$, où $\varphi(t) = \sin(t^2)$, $a(t) = \sin(t)$.

a) Montrer que φ' s'annule en un unique point de $[0, \alpha]$.

b) Montrer que $\dfrac{a}{\varphi'}$ et $\left(\dfrac{a}{\varphi'}\right)'$ ont des limites finies lorsque x tend vers 0.

c) Etablir un lien entre I_n et $J_n = \displaystyle\int_0^\alpha \left(\frac{a}{\varphi'}\right)'(x) e^{in\varphi(x)}\, dx$.

d) Montrer que $J_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et conclure.

Bibliographie : Chambert-Loir, tome 1 (ex 14), Gourdon (ex 4, ex 6 et remarque ex 12), Pommellet (ex 1, ex 7 th 4 bis et th 5), Précis d'analyse-géométrie, tome 7 (ex 2 et 3), Ramis, Odoux, Deschamps, tome 4 (ex 5), Rouvière (ex 7 th 5 bis et ex 12), Zuily, Queffélec (ex 6 th 4, ex 9 et ex 11)

Remarque : D'autres séances feront intervenir les intégrales à paramètres, à savoir les séances sur la transformation de Fourier, la transformation de Laplace et les séances de développements : Méthode de Laplace, Prolongement de la fonction Γ d'Euler.