Université de Nice-Sophia Antipolis 2007/2008
Département de mathématiques
Préparation à l'agrégation externe
F.Robert

TD: Développements limités et asymptotiques

Exercice 1: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On cherche à montrer qu'il possède une racine dans $\mathbb{C}$ (Théorème de d'Alembert).

(a) Montrez qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$.

(b) On suppose que $P(z_0) \neq 0$. En utilisant un développement limité de P en z_0, montrez une contradiction.

Exercice 2: Convergence de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}^{\ln n}}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}$.

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. Montrez que f admet un d'eveloppement limité à l'ordre 2 en tout point. La fonction f est-elle C^2?

Exercice 4: Donnez un développement asymptotique de $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ lorsque $x \to +\infty$. On commencera par montrez qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\ln n + \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

quand $x \to +\infty$ et calculez β. Indications: découper $\int_0^{n\pi}$ en plusieurs intervalles de longueur π.

Exercice 5: Soit la suite récurrente définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour $n \geq 0$. Donnez un développement asymptotique de (u_n) quand $n \to +\infty$. Indication: on pourra commencer par montrer que (u_n) converge vers 0, puis trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ converge vers une constante non nulle quand $n \to +\infty$.

Exercice 6: Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \geq 0$, on pose

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(nx)^i}{i!} \text{ et } Q_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(nx)^i}{i!}$$

de sorte que $P_n(x) + Q_n(x) = e^{nx}$.

(a) Dans le cas $x > 1$, donnez des équivalents de $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ quand $n \to +\infty$.

(b) Même question pour $0 \leq x < 1$.