Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2007-2008

Développements : Accélération de la convergence de suites. Théorème de Bernstein pour les séries entières.

1. Accélération de la convergence de suites [C]

Soit une suite réelle (x_n) qui converge vers $\xi \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \xi$. On suppose qu'il existe un réel k tel que $|k| < 1$ et une suite (ε_n) qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ tels que $x_{n+1} - \xi = (k + \varepsilon_n)(x_n - \xi)$.

La méthode d'Aitken consiste à construire la suite

$$y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}. \tag{1}$$

Dans le cas où $x_{n+1} = f(x_n)$ et ξ est un point fixe de f, elle s'écrit

$$y_n = x_n - \frac{(f(x_n) - x_n)^2}{fof(x_n) - 2f(x_n) + x_n}. \tag{2}$$

Dans le cas où $x_{n+1} = f(x_n)$ et ξ est un point fixe de f, la *méthode de Steffensen* s'écrit

$$y_n = f(x_n),\ z_n = f(y_n),\ x_{n+1} = x_n - \frac{(y_n - x_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n}. \tag{3}$$

1.1. Justifier la construction de la suite de la méthode d'Aitken (2). Expliquer la différence entre la méthode d'Aitken (2) et la méthode de Steffensen (3).

1.2. Montrer que la suite (y_n) de la méthode (1) est bien définie pour n assez grand et qu'elle converge plus vite vers ξ que (x_n), i.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n - \xi}{x_n - \xi} = 0$.

1.3. a. Ecrire le schéma de Steffensen (3) sous la forme $x_{n+1} = g(x_n)$.

b. Si ξ est un point fixe de g, montrer que ξ est également un point fixe de f.

c. Si ξ est un point fixe de f et que $f'(\xi) \neq 1$, montrer que ξ est également un point fixe de g.

1.4.a. On suppose que $|f'(\xi)| > 1$ (ξ est un *point fixe répulsif de* f). Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et si x_0 est proche de ξ alors la suite x_n définie par la méthode de Steffensen (3) converge vers ξ.

b. Montrer également que la vitesse de convergence de (x_n) vers ξ est sur-linéaire, i.e. plus rapide que c^n pour tout $c \in]0,1[$.

2. Théorème de Bernstein pour les séries entières [G,P]

On cherche à montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $a > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-a,a[$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(2n)}$ est positive, alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$.*

Remarque : il suffit de montrer que f est développable en série entière sur $]-b,b[$ pour tout $b \in]0,a[$.

2.1. On commence par le montrer pour une fonction g paire.

a. Ecrire le développement obtenu à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2n+1$.

b. Montrer que le reste R_n de la formule précédente vérifie $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} g(b)$, pour tout $x \in [0,b[$.

c. En déduire que g est développable en série entière sur $]-b,b[$.

2.2. On montre le théorème pour f quelconque, en posant $g(x) = f(x) + f(-x)$.

a. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre $2n+1$ et montrer que le reste $\tilde{R}_n(x)$ est majoré par le reste $R_n(x)$ de la question 2.1.

b. On note $S_n(x)$ les sommes partielles du développement de Taylor. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = 0$ en utilisant la question 2.1. Conclure.

2.3. Déduire que la fonction $x \to \tan x$ est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

3. Indications

Développement 1 :

1.1. S'inspirer de la méthode de la corde pour résoudre une équation non-linéaire, i.e. développer $\xi = f(\xi)$ autour de x_n puis approcher la dérivée de f par un taux d'accroissement bien choisi.

1.2. Calculer le dénominateur de la méthode (1) en fonction de k, de ε_n et de ε_{n+1}. En déduire une expression de $y_n - \xi$.

1.3. a. On trouve $g(x) = \dfrac{xfof(x) - f(x)^2}{fof(x) - 2f(x) + x}$.

1.3.c. Montrer que $g(\xi + h) = \xi + O(h)$ pour $h \to 0$.

1.4. Etendre le développement de la question 1.3.c. jusqu'à l'ordre suivant, c'est-à-dire montrer que $g(\xi + h) = \xi + o(h)$ quand $h \to 0$.

Développement 2 :

2.1.a. On remarquera que les termes d'indices impairs s'annulent.

2.1.b. Majorer $R_n(x)$ par $\left(\dfrac{x}{b}\right)^{2n+1} R_n(b)$, puis utiliser le développement de Taylor précédent pour majorer $R_n(b)$ par $g(b)$.

2.2.a. On utilisera que $g^{(2k)}(x) \geq f^{(2k)}(x) \geq 0$.

2.2.b. On écrira $S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}$.

2.3. Utiliser le théorème de Bernstein pour la dérivée de tan, c'est-à-dire $x \to 1 + \tan^2 x$.

4. Quelques références

[C] Chambert-Loir, Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2* , Masson.

[G] Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*, Ellipses.

[P] Pommellet, *Cours d'analyse, agrégation de mathématiques*, Ellipses.