Développements : Meilleure approximation uniforme par des polynômes. Inégalité isopérimétrique.

1. Meilleure approximation uniforme par des polynômes [C,D,G, CM]

(*)=Questions en option...

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On veut montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit I un compact de $\mathbb{R}$, on munit $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ de la norme uniforme notée $||\cdot||$. Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $p_n \in \mathcal{P}_n$ tel que $||f-p_n|| = \inf\limits_{p\in\mathcal{P}_n} ||f-p||$,* le polynôme de meilleure approximation de f de degré n.

1.1. Montrer l'existence d'un polynôme de meilleure approximation de f de degré n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ ([C] ou [D]).

On veut montrer l'unicité du polynôme p_n de meilleure approximation de f de degré n ([G]). Pour cela, nous allons montrer tout d'abord que la fonction $|f-p_n|$ prend la valeur $||f-p_n||$ en au moins $n+2$ points de I.

1.2. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'elle ne prend la valeur $||f-p_n||$ qu'en k points $x_1 < \cdots < x_k$ de I avec $1 \le k \le n+1$. On note q un polynôme de $\mathcal{P}_n$ tel que $f(x_i) = q(x_i)$, pour $1 \le i \le k$. On note $A = ||p-q||$ et on considère le polynôme $p_t = (1-t)p_n + tq$ pour $0 < t < 1$.

a. Justifier l'existence d'un tel polyôme q et pour tout $\varepsilon > 0$ d'un voisinage ouvert V_ε de $\{x_i,\, 1 \le i \le k\}$ tel que $|(f-q)(x)| \le \varepsilon$ pour $x \in V_\varepsilon$.

b. En séparant $x \in V_\varepsilon$ et $x \notin V_\varepsilon$, donner une majoration de $|(f-p_t)(x)|$.

c. En choisissant correctement ε et t, obtenir une contradiction.

1.3. En déduire l'unicité du polynôme p_n de meilleure approximation de f de degré n. Pour cela, considérer deux polynômes de meilleure approximation P_1 et P_2 et leur moitié $P = \dfrac{P_1+P_2}{2}$, qui est aussi un polynôme de meilleure approximation ([G]).

1.4.(*) On veut obtenir une caractérisation de p_n ([D]), à savoir que $f-p_n$ *équioscille* sur $n+2$ points de I, i.e. qu'il existe $n+2$ points $x_0, \cdots, x_{n+1}$ de I et $\varepsilon = \pm 1$ tels que

$$f(x_i) - p_n(x_i) = (-1)^i \varepsilon ||f-p_n||,\ i = 0, \cdots, n+1.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que $f-p_n$ équioscille sur $k+1$ points avec $k \le n$. Par simplicité, on note $g = f-p_n$ et on suppose $g(x_0) > 0$.

a. Montrer que l'on peut trouver des points $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$ pour $1 \le i \le k$ tels que $g(\xi_i) = 0$. On note $\pi(x) = \prod\limits_{1\le i\le k} (\xi_i - x)$ et $g_\varepsilon = g - \varepsilon\pi$.

b. Etudier les inégalités vérifiées par g et par π (resp. $(-1)^i g$ et $(-1)^i\pi$; $(-1)^k g$ et $(-1)^k\pi$) sur les intervalles $[a, x_0]$, $[x_{i-1}, \xi_i[$, $]\xi_i, x_i]$ et $[x_k, b]$. En déduire des inégalités pour g_ε sur ces mêmes intervalles.

c. Montrer que l'on peut ainsi trouver $\varepsilon > 0$ tel que $||g_\varepsilon|| < ||g||$. En déduire une contradiction.

1.5.(*) Réciproquement, montrer que si $f-p_n$ équioscille sur $n+2$ points de I, alors pour tout $q \in \mathcal{P}_n$, $q \ne p_n$, $\max\limits_{1\le i\le n} |f(x_i) - q(x_i)| < \max\limits_{1\le i\le n} |f(x_i) - p_n(x_i)|$ et donc que p_n est le polynôme de meilleure approximation de f de degré n. ([CM])

1.6.(*) Déterminer p_0 pour une fonction continue f et p_1 pour une fonction convexe f. ([C])

Remarque : *L'algorithme de Rémès* fournit une suite de polynômes convergeant vers p_n ([CM]).

2. Inégalité isopérimétrique [ZQ]

On veut montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une courbe de Jordan, $\mathcal{C}^1$ par morceaux de longueur L et enfermant une surface S. Alors*
- $L^2 \geq 4\pi S$,
- $L^2 = 4\pi S$ *ssi γ définit un cercle parcouru une fois.*

On supposera que $L = 1$ et on paramètrera γ par la longueur d'arc.

2.1. Donner alors une expression de L et de S en fonction de γ.

2.2. Prolonger γ en une fonction 1-périodique et donner alors une expression de L et de S en fonction des coefficients de Fourier de γ.

2.3. Conclure.

3. Indications

Développement 1 :

1.1. Montrer que $d(f, \mathcal{P}_n) \leq ||f||$, trouver un compact de $\mathcal{P}_n$ qui convient et utiliser le fait que $p \to ||f - p||$ est une fonction continue.

1.2. b. On trouve pour $x \in V_\varepsilon$, $|(f - p_t)(x)| \leq (1-t)||f - p_n|| + t\varepsilon$ et pour $x \notin V_\varepsilon$, $|(f - p_t)(x)| \leq \sup\limits_{y \notin V_\varepsilon} |f - p_n| + tA$.

1.2.c. On choisit $\varepsilon = ||f - p_n||/2$ et t tel que $\sup\limits_{y \notin V_\varepsilon} |f - p_n| + tA < ||f - p_n||$.

1.3. On a pour des x_i bien choisis,

$$\left|\left|f - \frac{P_1 + P_2}{2}\right|\right| = \left|\left(f - \frac{P_1 + P_2}{2}\right)(x_i)\right| \leq \frac{1}{2}|f - P_1|(x_i) + \frac{1}{2}|f - P_2|(x_i) \leq ||f - P_1||.$$

En considérant que les inégalités sont des égalités, on trouve que $P_1(x_i) = P_2(x_i)$.

1.4. b. On posera $0 < A < ||g||$ tel que sur $[a, x_0]$, $g(x) \leq -A$; sur $[x_{i-1}, \xi_i[$, $(-1)^i g(x) \leq A$ et sur $[x_k, b]$, $(-1)^k g(x) \geq -A$. Poser également $M = \sup\limits_{[a,b]} |\pi(x)|$.

1.4.c. Choisir $\varepsilon > 0$ tel que $A + \varepsilon M < ||g||$. On a alors $\tilde{p}_n = p_n + \varepsilon\pi \in \mathcal{P}_n$ et $||f - \tilde{p}_n|| < ||f - p_n||$.

1.5. Par l'absurde, on trouve que pour $q \in \mathcal{P}_n$, $(-1)^i\left(q(x_i) - p(x_i)\right) \geq 0$, on en déduit donc que $(-1)^i \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} q' - p' \leq 0$ et donc que $q' = p'$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ ou qu'il existe $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $(-1)^i\left(q'(\xi_i) - p'(\xi_i)\right) < 0$.

1.6. Prendre $p_0 = \dfrac{1}{2}(\max\limits_{[a,b]} f + \min\limits_{[a,b]} f)$.

Développement 2 :

2.1. $L = \displaystyle\int_0^1 |\gamma'(s)|\, ds = \int_0^1 |\gamma'(s)|^2\, ds$ et $S = \dfrac{1}{2}\mathrm{Im} \displaystyle\int_0^1 \gamma'(s)\overline{\gamma(s)}\, ds$.

2.2. Utiliser l'égalité de Parseval et le fait que $c_n(f') = 2i\pi n c_n(f)$.

4. Quelques références

[C] Chambert-Loir, Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2* , Masson.

[CM] Crouzeix, Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson.

[D] Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, PUG.

[G] Gonnord, Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'Agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses.

[ZQ] Zuily, Queffelec *Eléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson.