Université de Nice-Sophia Antipolis 2007/2008
Préparation à l'agrégation externe
Départment de mathématiques
F.Robert

Développement: l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S(E)$ sur $S^{++}(E)$

Soit $(E, (\cdot,\cdot))$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geq 1$. On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphisme symétriques sur E et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes définis positifs sur E.

1. Continuité

On note ici

$$\begin{array}{llll} \exp : & L(E) & \to & L(E) \\ & u & \mapsto & \sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^p}{p!} \end{array}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit $f_N : L(E) \to L(E)$ par $f_N(u) := \sum_{p=0}^{N} \frac{u^p}{p!}$ pour tout $u \in L(E)$.

1. Montrez que f_N converge uniformément vers exp sur tout compact. En déduire que exp$\in C^0(L(E), L(E))$.

2. Surjectivité

2. Montrez que $\exp(S(E)) \subset S^{++}(E)$.

3. Montrez que $\exp(S(E)) = S^{++}(E)$.

Dorénavant, on notera exp:$S(E) \to S^{++}(E)$.

3. Injectivité

Soient $v \in S^{++}(E)$ et $u \in S(E)$ tels que $\exp(u) = v$. Soit $\lambda > 0$ une valeur propre de v et soit $E_\lambda(v) := \text{Ker } (v - \lambda Id_E)$ l'espace propre associé.

4. Montrez que $uv = vu$.

5. Montrez que $u(E_\lambda(v)) \subset E_\lambda(v)$.

6. Montrez que $u_{|E_\lambda(v)} = (\ln \lambda) Id_{|E_\lambda(v)}$.

7. En déduire que exp: $S(E) \to S^{++}(E)$ est injectif.

4. Homéomorphisme

Soit une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (S^{++}(E))^{\mathbb{N}}$ et soit $v \in S^{++}(E)$ tels que $\lim_{k\to+\infty} v_k = v$. Soit $u_k := \exp^{-1}(v_k) \in S(E)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $u := \exp^{-1}(v) \in S(E)$. On va montrer que (u_k) converge vers u.

On définit la norme

$$|||u||| := \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

pour $u \in S(E)$, et où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire. Pour $u \in S(E)$, on pose

$$\rho(u) := \max\{|\lambda| / \, \lambda \text{ valeur propre de } u\}.$$

8. Montrez que $|||u||| = \rho(u)$ pour tout $u \in S(E)$.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ_k est valeur propre de u_k.

9. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, e^{λ_k} est valeur propre de v_k.

10. Déduire des deux questions précédente et de $\lim_{k\to+\infty} v_k = v$ que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée.

11. Déduire de **9.** et de $\lim_{k\to+\infty} v_k = v$ avec $v \in S^{++}(E)$ que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est minorée. Indication: on pourra raisonner par l'absurde.

12. Déduisez de **8.**, **10.** et **11.** que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

13. Soit $u' \in S(E)$ une valeur d'adhérence de (u_k). En utilisant l'injectivité, montrez que $u' = u$.

14. Déduire des deux questions précédentes que $\lim_{k\to+\infty} u_k = u$.

15. Montrez que $\exp\colon S(E) \to S^{++}(E)$ est un homéomorphisme.

Remarque: dans le cas des endomorphismes hermitiens, la démonstration est identique (les valeurs propres sont réelles).