Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2007-2008

# Développement : Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ par plusieurs méthodes.

Question préliminaire : Montrer que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est une intégrale convergente et que $I = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

## 1. Coordonnées polaires et théorème de Fubini. [G, p.329]

1.1. Soit $a > 0$, en utilisant les coordonnées polaires et le théorème de Fubini, calculer $I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ où $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq a^2\}$.
1.2. En considérant $\widetilde{I_a} = \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ où $C_a = [-a,a]^2$, en déduire la valeur de $I$.

## 2. En utilisant les intégrales de Wallis. [G, p.163]

On rappelle que l'intégrale de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ vérifie $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand $n \to +\infty$.
2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$.
2.2. Conclure.

## 3. En utilisant une intégrale à paramètres. [G, p.163]

On étudie la fonction $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt$ définie sur $\mathbb{R}^+$. On pose $f(x) = \int_0^x e^{-u^2}du$.
3.1. Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $g'$ en fonction de $f$ et $f'$.
3.2. Calculer la limite de $g$ quand $x \to +\infty$, en déduire celle de $f$ et conclure.

## 4. En utilisant une autre intégrale à paramètres. [L, ex. 10.10]

On étudie la fonction $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{t^2+1}dt$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
4.1. Montrer que $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $h'$.
4.2. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$ et calculer $h(0)$.
4.3. Montrer que $h'(x) = h(x) - \frac{I}{2\sqrt{x}}$. Résoudre cette équation par méthode de variation de la constante.
4.4. Conclure.

# Développement : Intégrale de Fresnel.

Question préliminaire : Montrer que $J = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$ est une intégrale convergente.

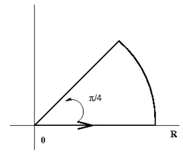
## 5. Coordonnées polaires et théorème de Fubini [G., p. 336]

On pose $f(t) = \int_0^t e^{ix^2}dx$. On étudie la fonction $F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)}dxdy$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et on note $G(T) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$.

5.1. Montrer, en passant en coordonnées polaires, que $F(t) = \frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\pi/4} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right)d\theta$. Exprimer également $F(t)$ à l'aide de $f$.
5.2. En déduire deux expressions de la limite de $G(T)$ quand $T \to +\infty$.
5.3. Conclure.

## 6. Par le théorème des résidus [T., p. 135]

Appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z) = e^{iz^2}$ sur le lacet $\gamma_R$ suivant. En déduire la valeur de $J$.




## 7. A l'aide d'une intégrale à paramètres [L., ex 10.13]

On pose $h(x) = e^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

7.1. Calculer $\int_0^X h(x)dx$ à l'aide du changement de variable $t = ux$, puis du théorème de Fubini.

7.2. En déduire que $\lim_{X \to +\infty} \int_0^X h(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(i+u^2)} du$.

7.3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(i+u^2)} du$ et conclure.

## 8. Indications

Exercice 1 :
1.2. Utiliser $D_a \subset C_a \subset D_{\sqrt{2}a}$ et passer à la limite $a \to +\infty$.
Exercice 2 :
2.1. Utiliser la concavité du logarithme.
2.2. Faire les changements de variable $t = \sqrt{n} \cos x$ et $t = \sqrt{n} \operatorname{cotan} x$.
Exercice 3 :
3.2. Montrer l'inégalité $0 \leq g(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$ et utiliser que $g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x)$.
Exercice 4 :
4.4. La méthode de variation de la constante et le changement de variable $t = u^2$ amènent à $h(x) = \frac{\pi}{2} e^x - Ie^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du$.
Exercice 5 :
5.1. Par symétrie, se ramener au demi-carré $\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi],\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 < r \leq \frac{t}{\cos\theta}\}$.

5.2. Utiliser la moyenne de Césaro dans un cas et le théorème de Fubini avec le changement de variable $t = u \cos\theta$ dans l'autre.

5.3. Pour montrer que $\mathrm{Im}(J) > 0$, faire le changement de variable $u = x^2$ et découper l'intégrale sur des intervalles appropriés.

Exercice 6 : Montrer que pour $x \in [0, \pi/2]$, $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$. On en déduira que $\int_0^{\pi/4} \left| iRe^{i\theta} exp(-iR^2 e^{2i\theta}) \right| d\theta \leq \frac{\pi}{4R} \left(1 - \exp(-R^2)\right)$.
Exercice 7 :
7.1. On trouve que $\int_0^X h(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(i+u^2)} \left(1 - e^{-(i+u^2)X^2}\right) du$.

7.3. Multiplier par la quantité conjuguée et faire une décomposition en éléments simples, en observant que $u^4 + 1 = (u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)$. On trouve $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(i+u^2)} du = \frac{\pi}{2} e^{-i\pi/4}$.

## 9. Quelques références

[G] Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*, Ellipses.

[L] Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS. Tome Analyse*, Ellipses.

[T] Tauvel, *Analyse complexe : exercices corrigés*, Dunod.