Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Différentiabilité, Année 2007-2008

Rappel : en dimension finie, la continuité des applications linéaires est assurée ce qui simplifie ce qu'il faut vérifier pour la différentielle. De plus, le choix de la norme n'est pas importante dans la définition de la différentielle. En dimension infinie, attention à bien se rappeler que ces deux points ne sont plus valables.

Prologue :

1) Etablir le lien entre dérivée et différentielle en dimension 1.

2) Montrer que lorsq'elle existe la différentielle est unique.

3) Soit $(x,y) \mapsto f(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On pose $u(x) = f(x,-x)$ et $g(x,y) = f(y,x)$. Calculer $u'(x)$ et les dérivées partielles de g.

Exercice 1 (Calcul de Différentielles)

1) a) Montrer que la différentielle d'une forme bilinéaire est $d\Phi(a,b).(h.k) = \Phi(a,k) + \Phi(h,b)$.
b) En déduire par récurrence, pour $f(M) = M^p$ sur les matrices, $df(M).H = \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-1-i}$,

2) Soit $Inv(M) = M^{-1}$ sur $Gl_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$ et que Inv est C^∞ sur $Gl_n(\mathbb{R})$.
b) Calculer les dérivées partielles de Inv au point I_n.
c) Calculer la différentielle de Inv en tout point M de $Gl_n(\mathbb{R})$.

3) En dimension infinie, avec E un Banach, on définit Inv sur $Gl_c(E)$ et on procède de la façon suivante.
a) Montrer que le fait d'être dans un Banach permet d'écrire $(\mathbb{1}+a)^{-1} = \sum(-1)^k a^k$ pour $\|a\| < 1$.
b) Si $\|x\| < 1$, montrer que $1-x$ est inversible.
c) En déduire que $Gl_c(E)$ est un ouvert de $L_c(E)$.
d) Calculer la différentielle de Inv en Id.
e) Calculer la différentielle de Inv en tout point u de $Gl_c(E)$.

4) On va montrer que $d\det(M).H = \mathrm{Tr}(\tilde{M}^t.H)$ où $\tilde{M}$ est la commatrice de M. Pour cela on note E_{ij} la base canonique des matrices d'ordre n. Que vaut $\det(M + tE_{ij})$ en fonction de $\det M$ et $\tilde{M}_{ij}$? En déduire $\frac{\partial}{\partial E_{ij}} \det M$ et conclure.

5) Soit A une matrice symétrique d'ordre n. Calculer la différentielle de $\varphi(x) = (Ax|x)$.

6)

Exercice 2 (Différentielle et normes)

1) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

2) Calculer la différentielle du carré d'une norme issue d'un produit scalaire.

3) Calculer la différentielle d'une norme issue d'un produit scalaire (sauf en 0).

Exercice 3 (Dérivées partielles)

1) Montrer que $f(x,y) = x^2 \mathbb{1}_{x\in\mathbb{Q}} + y^2 \mathbb{1}_{y\in\mathbb{Q}}$ est différentiable, mais n'a pas de dérivée partielle.

2) Montrer que $g(x,y) = \frac{y^2}{x} \mathbb{1}_{x\neq 0}$ a des dérivées suivant toutes les directions au voisinage de $(0,0)$, mais n'est même pas continue en $(0,0)$.

3) Calculer les dérivées partielles ∂^2_{xy} et ∂^2_{yx} de f en 0 avec $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 4 (Petit tour en dimension infinie)

1) Comment est définie le gradient en dimension finie et infinie.

2) On pose $F = C([0,T], \mathbb{R})$ muni de $\|f\| = \sup_{[0,T]} |f(t)|$ et $E = \{f \in F\,;\, f$ est de classe C^1 et nulle en $0\}$ muni de $\|f\|_1 = \sup_{[0,T]} |f'(t)|$. Montrer que $\Phi(f) = f' + f^2$ est de classe C^1 sur E.

3) Soit c_0 l'e.v.n. des suites réelles qui tendent vers 0 à l'infini muni de la norme du sup. Etudier la différentiabilité de cette norme sur c_0. (On pourra séparer le cas où le sup est atteint en un seul indice et celui où il est atteint en au moins deux indice.)

On peut aussi traiter l'exemple de $l^1(\mathbb{N})$ où la norme n'est différentiable en aucun point (Cf Leichtnam-Schauer).

Bibliographie : Gourdon, Leichtnam-Schauer, Pommellet, Rouvière.