Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2007-2008

D10) Théorèmes de Sturm d'oscillation et de comparaison.

Théorème 1

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ avec $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que les zéros d'une solution non nulle y de (E) sont isolés. En déduire que toute solution y de (E) n'a qu'un nombre fini de zéros sur tout compact de I.

2) Soit (f, g) une base de solutions de (E). Soient $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de f. Montrer qu'il existe un et un seul zéro de g dans $]t_1, t_2[$. (On utilisera le Wronskien.)

Théorème 2

Soient les équations différentielles (E_1) : $x'' + r(t)x = 0$, (E_2) : $y'' + s(t)y = 0$ avec $r, s \in C(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On suppose que $r \leq s$.

1) Soit x une solution de (E_1) et y une solution de (E_2). Soient $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de x. Si x et y ne sont pas proportionnelles sur $]t_1, t_2[$, montrer qu'il existe au moins un zéro de y dans $]t_1, t_2[$. (On utilisera $W = xy' - x'y$.)

2) Si $r(t) \leq \mu^2$ avec $\mu > 0$, alors deux zéros consécutifs $t_1 < t_2$ de x solution de (E_1) vérifient $t_2 - t_1 \geq \pi/\mu$. (Indication : prendre $s(t) = \mu^2$ et comparer x avec une solution y de (E_2) bien choisie.)

3) Si $s(t) \geq \lambda^2$ avec $\lambda > 0$, alors toute solution y de (E_2) s'annule au moins une fois dans tout intervalle fermé de longueur π/λ. (Indication : raisonner par l'absurde. Prendre $r(t) = \lambda^2$ et comparer y avec une solution x de (E_1) bien choisie.)

Bibliographie : Gourdon