Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2007-2008

Banach-Steinhauss et Application Ouverte.

Enoncé du théorème de de Banach-Steinhauss : Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continues de E dans F où E est un Banach et F un e.v.n.
Alors, ou bien i) la famille $(T_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée (c'est-à-dire que $\sup\limits_{i\in I}\|T_i\| < +\infty$),

ou bien ii) $G = \{x\,;\, \sup\limits_{i\in I}\|T_i(x)\| = +\infty\}$ est un G_δ dense.

Enoncé du théorème de l'application ouverte : Soient E et F des Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjectif. Alors il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

Référence : Brézis, Chambert-Loir.

Schéma de la preuve :

1) Preuve de Banach-Steinhauss.

2) Preuve du théorème de l'application ouverte :

a) En utilisant les ensembles $F_n = n\overline{T(B(0,1))}$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(0,\delta) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))}$.

b) Montrer que $B(0, \delta/2) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

c) On cherche à montrer que $B(0, \delta/4) \subset T(B(0, 1))$ ce qui concluera la preuve. Soit $y \in B(0, \delta/4)$. Commencer par montrer qu'il existe une suite $z^n \in E$ telle que $\|z^n\| < 1/2^n$ et $\|y - T(z^1 + \ldots + z^n)\| < \delta/(2^{n+2})$.

3) Montrer le corollaire de l'application ouverte. (Ne pas oublier de montrer la linéarité !)

4) Il faut savoir montrer la Remarque 3.

Remarques personnelles/détails à se rappeler par rapport au livre :

Remarque : A propos de ces théorèmes :

Lemme de Baire : Soit X un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés de X d'intérieurs vides. Alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ est d'intérieur vide.

On utilise souvent le résultat sous la forme suivante : Soit X un espace métrique complet non vide. Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés tel que $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide.

En notant O_n le complémentaire de F_n dans X, on a que si les ouverts O_n sont dense dans X pour tout n, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$ est dense dans X.

Remarque 1 : Un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts.

Remarque 2 : Une conséquence de Banach-Steinhauss est que si $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continues de E dans F où E est un Banach et F un e.v.n. et si $\forall x \in E, \sup\limits_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty$, alors $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$.

Corollaire de Banach-Steinhauss : Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'opérateurs linéaires continues de E dans F où E est un Banach et F un e.v.n. Si $\forall x \in E$, $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} T(x)$, alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Remarque 3 : Le théorème de l'application ouverte dit que T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F.

Corollaire de l'application ouverte : Soient E et F des Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijectif. Alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Exercice d'application **(l^p et son dual)**

Soit $p \in]1, +\infty[$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N})$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\, v_n$ est convergente. Montrer que $u \in l^q(\mathbb{N})$ où $1/p + 1/q = 1$.