

Théorème ergodique de von Neumann.

Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq 1$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k.$$

On va montrer que pour tout $x \in H$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x = Px$ où P est la projection orthogonale sur $\text{Ker}(Id - T)$.

1) Soit $x \in H$. Démontrer que $Tx = x$ si et seulement si $(Tx | x) = \|x\|^2$ si et seulement si $(x | Tx) = \|x\|^2$.

2) a) En déduire que $\text{Ker}(Id - T) = \text{Ker}(Id - T^*)$.

b) Montrer que pour tout $x \in \text{Ker}(Id - T^*)$, $T_n(x) \rightarrow x = p(x)$.

3) Montrer que pour tout $x \in \text{Im}(Id - T)$, $T_n(x) \rightarrow 0$.

4) Montrer que pour tout $x \in \overline{\text{Im}(Id - T)}$, $T_n(x) \rightarrow 0$.

5) Démontrer que $(\text{Im}(Id - T))^\perp = \text{Ker}(Id - T)$.

6) Conclure en utilisant

$$H = \text{Ker}(Id - T) \oplus \overline{\text{Im}(Id - T)}.$$

Exercice d'application : On prend $H = L^2(\mathbb{T})$, α réel, $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $f \in H$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\cdot + k\alpha) \xrightarrow{H} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

(On commencera par identifier l'opérateur T et on déterminera $\text{Ker}(Id - T)$.)

Remarque : On a montré au passage le résultat : Soit H un espace de Hilbert et $J \subset H$. Soit (Φ_n) une suite bornée de $\mathcal{L}(H)$ et $\Phi \in \mathcal{L}(H)$. Si la suite $(\Phi_n(x))$ converge vers $\Phi(x)$ pour tout $x \in J$, alors $(\Phi_n(x))$ converge encore vers $\Phi(x)$ pour tout $x \in \overline{J}$.

Rappel : Montrer les propriétés suivantes dans un hilbert H avec $u \in \mathcal{L}(H)$:

1) $\|u\| = \|u^*\|$,

2) Si F est un sev de H , $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

3) $\overline{\text{Im}u} = (\text{Ker}u^*)^\perp$.

4) Si F est un sev de H , $H = \overline{F} \oplus F^\perp$.

5) $H = \text{Ker}u^* \oplus \overline{\text{Im}u}$.

Bibliographie : Objectif Agreg.