Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2007-2008

Extremas Liés.

Enoncé du théorème : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $g_i : U \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, r$ des applications de classe C^1. On pose $g = (g_1, \ldots, g_r)$. On note $\Gamma = \{x \in U\,;\, g(x) = 0\}$. On suppose que $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et que les $dg_{i,a}$ sont linéairement indépendantes. Alors il existe des λ_i, appelés multiplicateur de Lagrange, tels que $df_a = \lambda_1 dg_{1,a} + \ldots + \lambda_r dg_{r,a}$ et ces λ_i sont uniques.

1) Rappeler l'énoncé du théorème des fonctions implicites.

2) Montrer l'unicité des λ_i.

3) On pose $s = n - r$. Pourquoi est-ce que $s \geq 0$? Traiter le cas $s = 0$. On suppose maintenant que $s \geq 1$. On identifie dans la suite $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ et on note les points $(x, y) = (x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r)$.

4) Quitte à changer le nom des variables, montrer que $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq r} \neq 0$.

5) Montrer que localement au voisinage de $a = (\alpha, \beta)$, $g(x, y) = 0$ équivaut à $y = \varphi(x)$.

6) On pose $h(x) = f(x, \varphi(x))$. Exprimer $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = 0$. Dériver par rapport à x_i la relation $g(x, \varphi(x)) = 0$.

7) On pose $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{rg}M \leq r$ et conclure.

Application 1 : Application à la diagonalisation

Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

(Utiliser $f(x) = (u(x), x)$ et $g(x) = (x, x)$ sur $S = \{x \in E\,;\, g(x) = 1\}$.)

Application 2 : Application en géométrie

On note S le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$. On utilise la distance euclidienne. Le but de l'exercice est de trouver pour quels points A, B, C du cercle le périmètre du triangle ABC est maximal.
Pour cela, on fixe A et on note $f(B, C) = d(A, B) + d(B, C) + d(C, A)$. On définit aussi $\Delta = \{(u, u)\,;\, u \in \mathbb{R}^2\}$ et $U = ((\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{A\})) \setminus \Delta$.

1) Montrer l'existence d'une solution pour le problème.

2) En appliquant les extremas liés, montrer qu'il existe (λ, μ) tels que $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \lambda \frac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|}$ et $\frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} - \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \mu \frac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|}$.

3) Conclure à la nature de ABC.

Bibliographie : Extremas liés (Gourdon), Application 1 (Objectif Agreg), Application 2 (Leichtnam-Schauer)