**Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,**

*Développement, Année 2007-2008*

**Théorème de Montel.**

**Enoncé du théorème de Montel :** Toute famille $\mathcal{F}$ de $H(\Omega)$ uniformément bornée sur tout compact de $\Omega$ est normale, c'est-à-dire que toute suite d'élements contient une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de $\Omega$.

**Référence :** Rudin, analyse réelle et complexe, version française. (Attention, la version anglaise ne présente pas les choses de la même façon), Zuily-Queffelec (pour la suite exhaustive).

**Schéma de la preuve :**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$.

1) On commence par construire une suite $\underline{(K_n) \text{ de compacts qui recouvre } \Omega}$ telle que $K_n \subset Int(K_{n+1})$. On appelle une telle suite une suite exhaustive de compacts.

Se rappeler que $K_n = \{x \in B(0,n) \cap \Omega\,;\ \text{dist}(x, C\Omega) \geq \dfrac{1}{n}\}$ et le dessin :

2) En utilisant la formule de Cauchy, on montre sur $K_n$ une majoration de la forme

$$|f(z') - f(z'')| \leq \frac{M_{n+1}}{\delta_n}|z' - z''|.$$

(Ceci donne l'équicontinuité.)

3) Soit $(f_m)$ une suite d'élements de $\mathcal{F}$ et $(z_i)$ une suite dense dans $\Omega$. On montre qu'il existe une sous-suite de $(f_m)$ qui converge en tous les points $z_i$. (Procédé d'extraction diagonal).

4) Avec l'équicontinuité, on montrer que cette suite converge uniformément sur tous les $K_n$.

**Remarques personnelles/détails à se rappeler par rapport au livre :**

**Remarque : A propos du théorème d'Ascoli :**

*Dans le développement ainsi fait, on n'utilise pas le théorème d'Ascoli, mais on refait le raisonnement qu'il contient. Il est bien de connaitre l'énoncé malgré tout.*

Soit deux espaces métriques $(X, d)$ et $(Y, \delta)$. Soit $C(X, Y)$ l'espace des applications continues de X dans Y. On suppose que (X,d) est un espace métrique compact. Ainsi on peut munir $C(X, Y)$ de la topologie de la convergence uniforme. Rappelons que si $(Y, \delta)$ est complet, alors il en est de même de $C(X, Y)$.

*Définition :* Soit $A$ une partie de $C(X, Y)$. On dit que $A$ est équicontinue sur $X$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall f \in A,\, \forall (x, y) \in X^2\,;\, d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Théorème d'Ascoli : Soit $A$ une partie bornée de $C(X, Y)$. Si $A$ est équicontinue sur $X$, alors $A$ est relativement compact dans $C(X, Y)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

*Rappel :* Un sous espace $A$ d'un espace topologique est relativement compact (pour la topologie induite) si son adhérence est compacte.

*Remarque :* Le théorème d'Ascoli permet de montrer aussi Cauchy-Péano.

### Application du Théorème de Montel

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \to \Omega$ holomorphe possédant au moins un point fixe $a$.

1) Montrer que les composées successives de $f$ forment une famille normale. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.

2) Montrer que si $f'(a) = 1$, alors $f = Id$.

3) Montrer que si $|f'(a)| = 1$, alors $f$ est une bijection de $\Omega$ dans $\Omega$.

Bibliographie : Chambert-Loir.