Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2007-2008

Théorème de projection sur un convexe.

Enoncé du théorème : Soit H un Hilbert. K un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que $\|f-u\| = \inf_{v\in K} \|f-v\|$.

De plus u est caractérisé par $u \in K$ et $(f-u, v-u) \leq 0 \, \forall v \in K$.
On note $u = P_K(f)$. Alors P_K est 1-lipschitzienne.

Référence : Brézis, Pommellet.

Schéma de la preuve :

1) Faire un dessin.

2) Existence : Soit $v_n \in K$ telle que $\|f-v_n\| \to d$ où $d = \inf_{v\in K} \|f-v\|$. En utilisant l'identité de la médiane, montrer que (v_n) est de Cauchy.

3) Unicité : Considérer $(u_1+u_2)/2$.

4) Equivalence avec les inégalités :

a) On suppose que $\|f-u\| = \inf_{v\in K} \|f-v\|$. Soit $v \in K$. On pose $v_t = (1-t)u + tv$ pour $t \in]0,1]$. Montrer que $2(f-u, v-u) \leq t\|v-u\|^2$ et conclure.

b) On suppose que $(f-u, v-u) \leq 0 \, \forall v \in K$. Montrer qu'alors $\|u-f\|^2 - \|v-f\|^2 \leq 0$ pour tout $v \in K$. (On partira de $\|v-f\|^2$.)

5) Lipschitziennité : Soit $f_1, f_2 \in H$, appliquer les inégalités sur les u_1 et u_2 associés.

Remarques importantes :

A) Dans le cas de la dimension finie, simplifier l'argument pour l'existence.

B) Dans le cas où K est un s.e.v. de dimension finie de H, comment peut-on simplifier le résultat.

C) On peut aussi prendre H préhilbertien et K complet, car c'est la complétude de K et non celle de H qui est utilisée.