Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2007-2008

Fonctions à variations bornées.

Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$.

Définitions : Pour $\sigma = (\sigma_0 = a, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}, \sigma_n = b)$ une subdivision de longueur n de $[a, b]$, on pose $V(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|$ la variation de f sur σ.

On pose $V_I(f) = \sup\{V(f, \sigma)\,;\, \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$ la variation totale de f sur $I = [a, b]$.

On dit que f est à variation bornée sur $[a, b]$ si $V_I(f) < +\infty$.

On va montrer en particulier le théorème de Jordan : f est à variation bornée sur $[a, b]$ si et seulement si f est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante sur $[a, b]$.

Référence : Chambert-Loir, tome 1.

Schéma de preuve :

1) Si f est monotone, calculer $V_I(f)$.

2) a) Montrer que $I \mapsto V_I(f)$ est croissante.

b) Soit $c \in]a, b[$, montrer que $V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$.

3) a) Montrer que $x \mapsto V_{[a,x]}(f) - f(x)$ est croissante.

b) En déduire le théorème de Jordan.

c) En déduire qu'une fonction à variation bornée n'a qu'un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité.

4) a) Si f est de classe C^1, montrer que $\lim_{|\sigma| \to 0} V(f, \sigma) = \int_a^b |f'(x)|\, dx$.

b) Si f est continue, montrer que $\lim_{|\sigma| \to 0} V(f, \sigma) = V_{[a,b]}(f)$.

(Question difficile : prendre une subdivision (de longueur $\tilde{n}$) qui permet d'approcher $V_{[a,b]}(f)$ à $\varepsilon/2$ près, puis utiliser la continuité uniforme de f pour $\varepsilon/(4(\tilde{n} + 1))$.)

c) Montrer que si f est de classe C^1, alors $V_{[a,b]}(f) = \int_a^b |f'(x)|\, dx$.

Exercice 1 : Calculer la variation totale de $f(x) = x^3/3 - 4x^2 + 15x$. (Sans utiliser la formule du 4)c).)

Exercice 2 : Trouver f telle que $\lim_{|\sigma| \to 0} V(f, \sigma)$ ne vaut pas $V_{[a,b]}(f)$.