Université de Nice-Sophia Antipolis
Département de Mathématiques
Préparation à l'agrégation extrene
Année 2007-2008
F.Robert

Td: Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

1. Quelques petits rappels sur les espaces euclidiens (donc réels)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve de dimension n. Pour $u \in L(E)$, on considère $u^\star$ son adjoint.

1.1. **Endomorphismes symétriques.** Un endomorphisme $u \in L(E)$ est symétrique si $u^\star = u$.

Théorème 1. *Soit $u \in L(E)$. Alors u est symétrique ssi il est diagonalisable dans une base orthonormée.*

1.2. **Endomorphismes orthogonaux.** Un endomorphisme $u \in L(E)$ est orthogonal si $u^\star u = Id_E$.

Théorème 2. *Soit $u \in L(E)$. L'endomorphisme u est orthogonal ssi il existe une base orthonormée β telle que*

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_p} & & \\ & & & I_r & \\ & & & & -I_s \end{pmatrix}$$

où $\theta_1, ..., \theta_p \in \mathbb{R}$ et $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

1.3. **Endomorphismes normaux.** Un endomorphisme $u \in L(E)$ est normal $u^\star u = uu^\star$.

Théorème 3. *Soit $u \in L(E)$. L'endomorphisme u est normal ssi il existe une base orthonormée β telle que*

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, ...\lambda_r \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in \{1, ..., s\}$, il existe $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $b_i \neq 0$ tels que $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$.

2. Quelques petits rappels sur les espaces hermitiens (donc complexes)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve orienté de dimension n. Pour $u \in L(E)$, on considère $u^\star$ son adjoint.

2.1. **Endomorphismes symétriques.** Un endomorphisme $u \in L(E)$ est symétrique si $u^\star = u$.

Théorème 4. *Soit $u \in L(E)$. Alors u est symétrique ssi il est diagonalisable dans une base orthonormée avec des valeurs propres réelles.*

2.2. **Endomorphismes orthogonaux.** Un endomorphisme $u \in L(E)$ est orthogonal si $u^\star u = Id_E$.

Théorème 5. *Soit $u \in L(E)$. L'endomorphisme u est orthogonal ssi il est diagonalisable dans une base orthonormée avec des valeurs propres de module 1.*

2.3. **Endomorphismes normaux.** Un endomorphisme $u \in L(E)$ est normal $u^\star u = uu^\star$.

Théorème 6. *Soit $u \in L(E)$. L'endomorphisme u est normal ssi il est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Exercice 1: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve orienté de dimension 2 et soit $u \in L(E)$ un endomorphisme symétrique. En n'utiliser ni les nombres complexes ni les théorème "massue" de réduction, montrez que u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Exercice 2: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve orienté de dimension 3 et soit $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$. On considère la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ autour de $\vec{u}$.

a. Donnez la définition de f!

b. Montrez que pour tout $x \in E$, on a

$$f(x) = (1 - \cos\theta)\frac{\langle \vec{u}, x \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}\vec{u} + \cos\theta x + \frac{\sin theta}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \wedge x$$

pour tout $x \in E$.

Exercice 3: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve de dimesnion n. Soit $f : E \to E$ une application telle que

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \; \forall x, y \in E,$$

où $d(a, b) := \|a - b\|$. On cherche à montrer qu'il existe $c \in E$ tel que $f - c \in O(E)$.

a. Soit $\beta = (e_1, ..., e_n)$ une bon de E. Montrez qu'il existe $g \in O(E)$ et qu'il existe $c \in E$ tels que $\varphi := g^{-1} \circ (f - c)$ fixe 0 et la base β et conserve les distances.

b. Soient $a, b \in E$ tels que $a \neq b$. Déterminez $P := \{x \in E / \, d(a, x) = d(b, x)\}$

c. Montrez que $\varphi = Id_E$ et conslure.

Exercice 4: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve de dimension n et soit u un projecteur de E. Soit $u \in L(E)$ un projecteur. Montrez que u est un projecteur orthogonal ssi $|||u||| \leq 1$.

Exercice 5: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve de dimension n. Montrez que tout endomorphisme normal et diagonalisable est symétrique.

Exercice 6: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un ev hermitien de dimension n. Soit $u \in L(E)$. MOntrez que u est normal ssi il existe $P \in K[X]$ tel que $u^\star = P(u)$.

Exercice 7: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un ev hermitien de dimension n. Déterminez les $u \in L(E)$ tels que $|\det u| = 1$ et $|||u||| \leq 1$.

Exercice 8: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve de dimension n. On considère la norme triple associée à la norme euclidienne. Montrez que pour tout $u \in L(E)$, on a

$$|||u||| = \sqrt{\rho(u^\star u)}$$

où $\rho(u^\star u) := \sup\{|\lambda| / \, \lambda \text{ valeur propre de } u^\star u\}$.

Ne pas oublier: réduction des endomorphismes par minimisation, les exercices de la feuille "espaces euclidiens".