Agrégation, exercices applications linéaires
Année 2007-2008.

A. 1.)On note E l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\int_0^1 |f(t)|dt$ et F l'espace $C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\int_0^1 |f(t)|dt$. Soit

$$S : E \to F \quad S(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt$$

Montrer que S est continue et calculer sa norme.
Existe t-il un élément non nul $f \in E$ tel que $\|S(f)\|_F = \|f\|_E$?
L'application S est-elle injective, surjective? Calculer l'image de S.
E est-il un espace vectoriel normé complet?

2) Soit T l'application de F dans E, $T(f) = f'$. Est-ce que T est continue ?

3)On note G l'espace $C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|)dt$, et on note toujours S l'application de E dans G, $S(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt$ et T l'application de G dans E, $T(f) = f'$. Montrer que S et T sont continues.

4)Monter que le complété $\mathcal{E}$ de E est l'espace $L^1(0,1)$. Quel est le complété $\mathcal{F}$ de F ? Montrer que toute suite de Cauchy dans G converge dans $C([0,1],\mathbb{R})$. Quel est le complété $\mathcal{G}$ de G?(utiliser la théorie des distributions)

B. Soit V un sous espace vectoriel fermé de $C([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que tout élément de V est une fonction de classe C^1, c'est à dire $V \subset C^1([0,1],\mathbb{R})$. On se propose de montrer que V est de dimension finie.
1.) Montrer que l'application j de V dans $C^1([0,1],\mathbb{R})$ définie par $j(f) = f$ est continue. (Utiliser le théorème du graphe fermé). En déduire qu'il existe une constante C telle que l'on a $\|f\|_{C^1} \leq C\|f\|_{C^0}$ pour tout $f \in V$.
2.) En déduire que la boule unité de V est compacte, et conclure.

C. Pour $1 \leq p < \infty$, on note l^p l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\geq 1}$ telles que $\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty$ et l^∞ l'espace des suites bornées muni de la norme $\|x\|_\infty = sup_n|x_n|$.

1.) Montrer que l^∞ est isométrique au dual $(l^1)'$ de l^1.

2.) Montrer que pour $1 < q < \infty$ le dual $(l^q)'$ de l^q est isométrique à l^p avec $1/p + 1/q = 1$.

3.)Montrer que l'espace X des suites convergentes est un sous espace fermé de l^∞. Montrer que l'application linéaire u de X dans $\mathbb{R}$, $u(x) = lim_{n\to\infty}x_n$ est continue. Existe t-il une application linéaire continue v de l^∞ dans $\mathbb{R}$ qui prolonge u?

4.)Montrer qu'il existe un élément φ du dual $(l^\infty)'$ qui n'est pas de la forme

$$\varphi(x) = \sum_n a_n x_n$$

avec $(a_n) \in l^1$.