Université de Nice-Sophia Antipolis
Département de Mathématiques
Préparation à l'agrégation extrene
Année 2007-2008
F.Robert

Td: Espaces euclidiens et hermitiens

Exercices envisagés pendant la séance: 1, 3, 5, 7, 9.

1. bases orthonormées

Exercice 1: On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure usuelle d'espace euclidien. Montrez que les vecteurs $(1,1,0)$, $(1,2,-1)$ et $(-1,1,2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et orthonormalisez cette base.

Exercice 2: Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On suppose que

$$\|x\|^2+\|y\|^2=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)$$

pour tout $x,y\in E$. Montrez que $\|\cdot\|$ est issue d'un produit scalaire.

Exercice 3: Le produit mixte. Soit $(E,\langle\cdot,\rangle)$ un eve de dimension finie n. Pour $X_1,...,X_n\in E$, on pose

$$\omega(X_1,...,X_n):=\left|\det_\beta(X_1,...,X_n)\right|,$$

où β est une base orthonormée de E.

a. Montrez que ω est bien définie.

b. En écrivant les coordonnées de chaque vecteur dans une base orthonormée, montrez que

$$\omega(X_1,...,X_n)=\sqrt{G(X_1,...,X_n)}$$

où $G(X_1,...,X_n):=\det(\langle X_i,X_j\rangle)_{i,j\leq n}$ est le déterminant de Gram.

c. En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, montrez que

$$\omega(X_1,...,X_n)\leq\|X_1\|\cdot...\cdot\|X_n\|$$

pour tout $X_1,...,X_n\in E$. Quels sont les cas d'égalité?

Exercice 4: Soit E un espace vectoriel et soient q_1,q_2 deux formes bilinéaires symétriques. On suppose que q_1 est définie positive. Montrez qu'il existe une base orthonormée pour q_1 et orthogonale pour q_2.

2. Inégalité de Cauchy-Schwartz

Exercice 5: On se place sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit la forme bilinéaire $(A,B)\mapsto Tr(A^tB)$.

a. Montrez que cette forme bilinéaire est un produit scalaire.

b. Trouvez α minimum tel que

$$|Tr(M)|\leq\alpha\sqrt{Tr(M^tM)}\ \forall M\in M_n(\mathbb{R}).$$

Quels sont les cas d'égalité?

Exercice 6: Déterminez $\sup_{A\in O_n(\mathbb{R})}|\sum_{i,j}A_{ij}|$.

3. Minimisation

Exercice 7: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve. Soit F un sev de E et soit $x \in E$. Montrez qu'il existe un unique $y \in F$ tel que

$$\|x - y\| = \min_{z \in F} \|x - z\|.$$

Montrez que y est caractérisé par la propriété suivante:

$$\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$$

Exercice 8: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve et soit F un sous-ev de E et soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de F. Soit $x \in E$: montrez que

$$d(s, F) = \frac{G(x, e_1, ..., e_p)}{G(e_1, ..., e_p)}.$$

Exercice 9: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(a_1, ..., a_n) = \int_0^1 (1 + a_1 x + ... + a_n x^n)$$

pour $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrez que f admet un minimum atteint en un point unique de $\mathbb{R}^n$.
Indication: on munira $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ\, dx$ et on pourra utiliser les exercice 7 et 8.

Exercice 10: pensez aux polynomes orthogonaux!

4. Endomorphismes

Exercice 11: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve et soient $p, q \in L(E)$ deux projecteurs orthogonaux d'images respectives F et G. Montrez que

$$p \circ q = q \circ p \;\Leftrightarrow\; F \cap (F \cap G)^{\perp} \text{ et } F \cap (F \cap G)^{\perp} \text{ sont orthogonaux.}$$

Exercice 12: Soit $(V, \langle \cdot, \rangle)$ un eve de dimension n. Soient $E = L(V)$, $S = S(V)$ et $O = O(V)$.

a. Pour $a \in E$, on définit $\varphi_a \in L(S)$ par

$$\forall x \in S,\; \varphi_a(x) = a^{\star} \circ x \circ a.$$

Montrez que $\varphi_{ab} = \varphi_b \circ \varphi_a$.

b. Sur S, on considère le produit scalaire $\langle a, b \rangle := Tr(a \circ b)$. Déterminez $\varphi_a^{\star}$. Montrez que pour $a \in O$, on a $\varphi_a \in O(S)$.

c. Déterminez φ_a lorsque a est diagonalisable sur une BON.

d. Montrez que pour tout $a \in E$, on a $|\det \varphi_a| = |\det a|^{n+1}$.

d. Montrez que pour tout $a \in E$, on a $\det \varphi_a = (\det a)^{n+1}$.