Préparation à l'agrégation externe
Département de Mathématiques
Université de Nice-Sophia Antipolis
F.Robert 2007/2008

Une propriété des fonctions monotone

On se propose de montrer la proposition suivante:

Proposition 1. *Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors f est strictement croissante si et seulement si $f' \geq 0$ et $Z(f') := \{x \in I / \, f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide.*

Preuve: ($\Rightarrow$) Supposons que f est strictement croissante. Alors on a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Supposons que $Z(f')$ soit d'intérieur non vide: alors il existe $a < b$ tels que $[a, b] \subset Z(f') \subset I$. Du coup, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$ intervalle et f est constante sur $[a, b]$: ceci est une contradiction avec la croissance stricte de f. Donc $Z(f')$ est d'intérieur vide.

($\Leftarrow$) Supposons que $f' \geq 0$ et que $Z(f')$ soit d'intérieur vide. Alors on a f croissante. Supposons que f n'est pas strictement croissante: alors il existe $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Soit $x \in [a, b] \subset I$: comme f est croissante, on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, et donc $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in [a, b]$ et du coup $f'(x) = 0$ pour $x \in [a, b]$ et $[a, b] \subset Z(f')$. On en déduit que $Z(f')$ est d'intérieur non vide, ce qui est une contradiction avec notre hypothèse initiale. Donc f est strictement croissante.