Université de Nice-Sophia Antipolis 2007/2008
Préparation à l'agrégation externe
Départment de mathématiques
F.Robert

Le folium de Descarte

Soit
$$\mathcal{F} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$$
Le but est de tracer cette figure, appelée folim de Descartes, aussi précisément que possible.

1. Etude via les fonctions implicites

1.1. Montrez qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{F} \setminus \{(0,0), A\}$, il existe I, J intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in C^\infty(I, J)$ tels que $(x_0, y_0) \in I \times J$ et
$$\forall (x,y) \in I \times J, \; (x,y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

1.2. M. ontrez qu'il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{F} \setminus \{(0,0), B\}$, il existe I, J intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $\psi \in C^\infty(J, I)$ tels que $(x_0, y_0) \in I \times J$ et
$$\forall (x,y) \in I \times J, \; (x,y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x = \psi(y).$$

1.3. M. ontrez que $\mathcal{F} \cap (]-\infty, 0[^2) = \emptyset$.

1.4. Etude sur $]-\infty, 0[\times]0, +\infty[$**. a.** Montrez que pour tout $x < 0$, $\exists! y > 0$ tel que $(x,y) \in \mathcal{F}$. Dorénavant, on notera $y_1(x)$ cet unique réel positif.

b. Montrez que $y_1 \in C^\infty(]-\infty, 0[)$.

c. Montrez que $y_1'(x) < 0$ pour tout $x < 0$.

1.5. Etude sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$**. a.** Montrez que $\mathcal{F} \cap]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ est borné.

b. Tracez $\mathcal{F}$ au voisinage de A et B en utilisant les paramétrages φ et ψ.

c. Terminez le tracé de $\mathcal{F}$ en déterminant le signe de φ', ψ'.

1.6. Calcul de courbure. En utilisant un paramétrage de $\mathcal{F}$ au voisiange de A et en choisissant une orientation de $\mathbb{R}^2$, calculez la courbure au point A (léger abus de langage). Idem en B.

2. Forme paramétrée

2.1. Montrez que
$$\mathcal{F} = \left\{ \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right) / \, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}.$$
On note alors $x(t)$ et $y(t)$ les deux coordonnées.

2.2. Déterminez les variations de x et y en fonction de t.

2.3. Tracez le folium $\mathcal{F}$ en utilisant cette étude.

2.4. Montrez que la droite $x + y + 1 = 0$ est asymptote à $\mathcal{F}$ au sens suivant: pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que
$$\{(x,y) \in \mathcal{F} \text{ et } \|(x,y)\| \geq R\} \Rightarrow \; 0 < x + y + 1 < \epsilon.$$