Préparation à l'agrégation externe 2007/2008
Département de Mathématiques
Université de Nice-Sophia Antipolis
F.Robert

TD-Développement:
Version géométrique du théorème de Hahn-Banach

Le but de cette séance est de démontrer le résultat suivant (dit forme géométrique du théorème de Hahn-Banach):

Théorème 1. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $A, B \subset E$ deux convexes non vides et disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors il existe $f \in E' \setminus \{0\}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \quad \forall x \in A \text{ et } \forall y \in B.$$

On dit alors que l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large.

On admettra la version analytique du théorème de Hahn-Banach déjà vue en TD:

Théorème 2. *Soit E un espace vectoriel. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ telle que*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ et } p(x+y) \leq p(x) + p(y) \; \forall x, y \in E \text{ et } \forall \lambda > 0.$$

Soit $G \subset E$ un sous-ev de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in G$. Alors il existe $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire telle que

$$f_{|G} = g \text{ et } f(x) \leq p(x) \; \forall x \in E.$$

1. Jauge d'un convexe

Soit $C \subset E$ un convexe ouvert de E tel que $0 \in C$. Pour $x \in E$, on définit

$$p(x) := \inf\{\alpha > 0 / \; \alpha^{-1} x \in C.\}$$

Cette application s'appelle la jauge d'un convexe.

1.1. En utilisant que C est ouvert, montrez que p est bien définie et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$.

1.2. Montrez que $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $x \in E$ et $\lambda > 0$.

1.3. Soient $x, y \in E$. En utilisant la définition de $p(x)$ et celle de $p(y)$, montrez que pour tout $\epsilon > 0$, on a $p(x+y) \leq p(x) + p(y) + 2\epsilon$. En déduire que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

1.4. En utilisant que C est ouvert, montrez que $C = \{x \in E / \; p(x) < 1\}$.

2. Preuve du Théorème 1

2.1. Soit C un convexe ouvert non vide et soit $x_0 \notin C$. Soit $x_1 \in C$, soit $D = C - x_1$ et soit $g : \mathbb{R}(x_0 - x_1) \to \mathbb{R}$ telle que $g(t(x_0 - x_1)) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En appliquant le Théorème 2 à g et à la jauge p de D, montrez qu'il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ tel que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.

2.2. Soient A, B deux convexes disjoints non vides avec A ouvert. Montrez que $A - B = \{x - y / \; x \in A \text{ et } y \in B\}$ est un ouvert convexe non vide tel que $0 \notin A - B$.

2.3. En appliquant 2.1 à $C = A - B$, montrez le Théorème 1.

3. Seconde forme géométrique

Soient A, B deux convexes disjoints de E. On suppose que A est compact et que B est fermé.

3.1. Montrez qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $A_\epsilon = A + B(0, \epsilon)$ et $B_\epsilon = B + B(0, \epsilon)$ sont deux ouverts disjoints non vides.

3.2. En appliquant le Théorème 1 à A_ϵ et B_ϵ, montrez qu'il existe $0 < \alpha < \beta$ tels que

$$f(x) \leq \alpha < \beta < f(y) \; \forall x \in A \text{ et } y \in B.$$

(ce résultat est parfois appelé seconde forme géométrique du théorème de Hahn-Banach).

4. Un corollaire intéressant

Soit $F \subset E$ un sous-ev tel que $\overline{F} \neq E$. Montrez qu'il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ tel que

$$f(x) = 0 \; \forall x \in F.$$

Indication: Appliquez la seconde forme géométrique à $\overline{F}$ et $\{x_0\}$.

Référence: H.Brezis, "Analyse fonctionnelle, Théorie et applications", Masson.