Théorème de Hahn-Banach (version analytique).

On considère E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, V un sous-espace de E, et $f : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur V. Le théorème de Hahn-Banach (version analytique) affirme qu'il existe une forme linéaire $F : E \to \mathbb{R}$ sur E telle que

(i) $F = f$ sur V,

(ii) $\|F\|_{E^*} = \|f\|_{V^*}$.

On rappelle que

$$\|f\|_{V^*} = \sup\big\{|f(x)|,\quad x \in V,\quad \|x\| \le 1\big\} = \sup\big\{|f(x)|,\quad x \in V,\quad \|x\| = 1\big\}.$$

1) *a)* Montrer que sans la contrainte (ii), le problème est relativement facile.

b) Vérifier que si la forme linéaire $F : E \to \mathbb{R}$ prolonge f, alors $\|F\|_{E^*} \ge \|f\|_{V^*}$.

2) On suppose dans cette question que E est euclidien. Déterminer un moyen canonique de construire une telle forme linéaire F (on pourra aussi penser à écrire simplement les formes linéaires sur un espace euclidien).

3) *a)* On note $M = \|f\|_{V^*}$, et on se donne $u \in E$. Montrer que pour tous x, $y \in V$,

$$f(x) - M\|x-u\| \le f(y) + M\|y-u\|,$$

en considérant la différence des deux membres. En déduire l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tous x, $y \in V$, on ait

$$(*) \qquad f(x) - M\|x-u\| \le a \le f(y) + M\|y-u\|.$$

b) On suppose que $u \in E \setminus V$. On définit $g : V \oplus \mathbb{R}u \to \mathbb{R}$ par $g(x+tu) = f(x) + at$ (pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in V$). Vérifier que g est une forme linéaire qui prolonge f à $V \oplus \mathbb{R}u$. En utilisant $(*)$ avec $y = x$, établir que pour tout $x \in V$,

$$|g(x-u)| \le M\|x-u\|.$$

En déduire que pour $x \in V$, $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|g(x+tu)| \le M\|x+tu\|.$$

On pourra factoriser t. Conclure alors que g prolonge f à $V \oplus \mathbb{R}u$ et a la même norme.

c) Etablir le théorème de Hahn-Banach (dans le cas où E est de dimension finie).

4) Application. *a)* Montrer que pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = \max\big\{F(x),\quad F \in E^*,\quad \|F\|_{E^*} = 1\big\}.$$

On pourra penser à prolonger la forme linéaire $f : \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ donnée par $f(tx) = t\|x\|$.

b) En déduire que l'application $J : E \to \big(E^*\big)^*$ définie pour $x \in E$ par $J(x) : E^* \ni F \to F(x) \in \mathbb{R}$ (on a bien $J(x)$ forme linéaire sur E^*) est une isométrie.

5) On considère E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On le note $E_{\mathbb{R}}$ lorsqu'il est muni de sa structure réelle. soit V un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de E et on considère une forme $\mathbb{C}$-linéaire $f : V \to \mathbb{C}$. Nous allons montrer que le théorème de Hahn-Banach reste vrai dans ce cadre.

a) Vérifier que $g \equiv \mathrm{Re}\,(f)$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur $E_{\mathbb{R}}$. Justifier aussi que pour $x \in E$, $f(x) = g(x) - ig(ix)$. En déduire que $\|g\|_{E_{\mathbb{R}}^*} = \|f\|_{E^*}$.

b) Par le théorème de Hahn-Banach (réel), il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire $G : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ sur $E_{\mathbb{R}}$ prolongeant g et de même norme. Montrer que $F : E \to \mathbb{C}$ donnée par $F(x) = G(x) - iG(ix)$ répond au problème.

Ce théorème reste vrai en dimension infinie sous la forme suivante (voir [Brézis] par exemple) : Soit E un espace vectoriel normé, V un sous-espace de E et $f : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire *continue* sur V. Alors il existe une forme linéaire continue $F : E \to \mathbb{R}$ prolongeant f et de même norme.

La preuve utilise le Lemme de Zorn, pour remplacer l'argument en dimension finie de **3)** *c).*

Référence : F. Rouvière, *PGCD.* Cassini.