Intégrales à paramètre et holomorphie.

Ex. 1.

1) La fonction $J_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de Bessel est donnée par $J_0(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos\big(x\cos\theta\big)\ d\theta$.

a) Montrer que J_0 est bien définie sur $\mathbb{R}$ et admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) Retrouver le fait que J_0 est une fonction entière en utilisant le développement en série entière de cos, ou en remarquant que $2J_0(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \exp\big(ix\cos\theta\big)\ d\theta$.

2) Soit la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}(1-t)^{x-1}\ dt$. Etablir que f est bien définie sur $]0,1[$ et admet un prolongement holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ que l'on déterminera.

3) On considère la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln(t)\ dt.$$

a) Montrer que cette fonction est bien définie et admet un prolongement holomorphe F dans un ensemble à préciser.

b) En intégrant par parties F', déterminer une équation différentielle *holomorphe* sur F. Exprimer F à l'aide de $f(1)$ (que l'on ne cherchera pas à calculer). En déduire que F admet un prolongement holomorphe sur un ensemble à préciser.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $|f(x)| \leq e^{-|x|}$. Démontrer que sa transformée de Fourier $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\ dx$ a ses zéros isolés. On pourra justifier un prolongement holomorphe de $\hat{f}$.

Ex. 2 : Une base Hilbertienne.

On note μ la mesure sur $\mathbb{R}^+$ à densité e^{-x}, *i.e.* $d\mu = e^{-x}dx$ sur $\mathbb{R}^+$. On travaille dans l'espace

$$L^2(\mu) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} \text{ mesurable } \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 d\mu < \infty \right\}.$$

1) Vérifier que les fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}^+$ sont dans $L^2(\mu)$. Les polynômes orthogonaux associés s'appellent les *polynômes de Laguerre*. On se propose de montrer que ces polynômes forment un ensemble total.

Soit donc $f \in L^2(\mu)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)x^n\ d\mu(x) = \int_0^{+\infty} f(x)x^n e^{-x}\ dx = 0.$

2) On considère la fonction $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-itx}\ d\mu(x)$.

a) Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F admet un prolongement holomorphe dans la bande $\{\ \mathrm{Im}\ (z) < 1\ \}$. On pourra pour cela écrire $f(x)e^{-itx}e^{-x} = \big(f(x)e^{-x/2}\big) \times \big(e^{-itx}e^{-x/2}\big)$.

c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0)$. Qu'en déduit-on pour F dans la bande en question ?

d) Conclure que $f \equiv 0$, puis le résultat.

3) Justifier que l'ensemble des fonctions (sur $\mathbb{R}^+$) du type $x \mapsto e^{-x/2}P(x)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ est une famille totale dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. On pourra pour cela vérifier que $L^2(\mu)$ et L^2 sont naturellement isométriques.