Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Intégration, Fubini, Convolution, Espaces L^p, Année 2007-2008.

Exercice 1 (Lien entre Riemann et Lebesgue)

1) Rappeler le résultat disant qu'une fonction mesurable peut être approchée (en quel sens ?) par des fonctions étagés. Rappeler ce qu'est une fonction Riemann-intégrable.

2) Rappeler les théorèmes de la convergence monotone, de Fatou, de convergence dominée, de Fubini-Tonelli.

3) Soit $I = [a, b]$ un compact. Montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur I si et seulement si f est bornée et f est continue p.p. pour la mesure de Lebesgue.

4) Donner un exemple d'une fonction Riemann intégrable et pas Lebesgue intégrable. Donner un exemple d'une fonction Lebesgue intégrable et pas Riemann intégrable.

5) Donner un exemple d'une fonction $f(x, y)$ telle que $\int_0^1 f(x, y)\, dx$ et $\int_0^1 f(x, y)\, dy$ existent pour tout $x, y \in [0, 1]$ et $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy$.

6) Donner un exemple d'une fonction $f(x, y)$ telle que $\partial_x \int_0^1 f(x, y)\, dy \neq \int_0^1 \partial_x f(x, y)\, dy$ bien que ces deux quantités existent.

Exercice 2 (Convolution)

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurables. On définit, lorsque c'est possible, la convolution de f et g par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - t) g(t)\, dt.$$

1) Montrer que si $(f * g)(x)$ existe, alors $(g * f)(x)$ existe et $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

2) Montrer que $\mathrm{Supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{Supp} f + \mathrm{Supp} g}$.

Exercice 3 (Inégalités de Young)

On cherche à montrer que si $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $p, q, r \in [1, +\infty]$ et $\dfrac{1}{r} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, alors $f * g \in L^r$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

1) Traiter le cas $p = 1$.

2) Traiter le cas $r = +\infty$.

3) Traiter les autres cas. (Penser à l'inégalité de Hölder généralisée.)

Exercice 4 (Continuité uniforme)

On reprend les notations de l'exercice précédant. Montrer que dans le cas $r = +\infty$, $f * g$ est uniformément continue. (On commencera par le cas où f est continue à support compact.)