Université de Nice-Sophia Antipolis
Agrégation de mathématiques
2007/2008
F.Robert

A propos de la leçon sur les racines de vendredi 12/10/07

Quelques suggestions d'exercices:

a. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrez que $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ pour la topologie d'espace vectoriel normé.
Esquisse de solution: pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, posons $P(X) = \det(A - XI_d) \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme P est non nul (de degré n) et admet au plus n racines. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $P(t) \neq 0$ pour $t \in (0, \alpha)$, d'où la densité.

b. Montrez que $X^5 - X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ admet une unique racine réelle et pas de racine rationnelle.
Esquisse de solution: une étude du sens de variation donne rapidement l'existence d'une unique racine réelle. Si elle est rationnelle, on obtient une absurdité en l'écrivant $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $d : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par $d(P) = P'$ pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminez le polynôme minimal de l'endomorphisme d.
Réponse: X^n.

d. Soit $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$. On écrit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_i \in \mathbb{Z}$ pour $i \in \{0, ..., n\}$ et $a_n \neq 0$. On suppose que $\alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, est racine de P. Montrez que $p|a_0$, $q|a_n$, $p - q|P(1)$ et $p + q|P(-1)$.
Indication: pour les deux premiers, écrire $q^n P(\alpha) = 0$. Pour $\epsilon \in \{-1; +1\}$, écrire $q^n(P(\alpha) - P(\epsilon)) = -q^n P(\epsilon)$ et remarquer que $p - \epsilon q | p^i q^{n-i} - \epsilon^i q^n$ pour $i \in \{0, ..., n\}$.

Concernant le point délicat de la preuve du développement: je reprends (partiellement) les notations de votre collègue.
Soit $F \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. Soit K un surcorps de $\mathbb{C}$ dans lequel F est scindé. On pose alors $x_1, ..., x_n \in K$ tels que

$$F = \prod_{i=1}^n (X - x_i).$$

Pour $c \in \mathbb{R}$ et $i, j \in \{1, ..., n\}$, on pose $t_{ij} = x_i + x_j + c x_i x_j \in K$. On pose alors

$$G = \prod_{(i,j) \in \{1,...,n\}^2} (X - t_{ij}) \in K[X].$$

Lemme: $G \in \mathbb{R}[X]$.

Preuve: Il faut travailler à la fois dans deux espaces de polynômes: $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ et $\mathbb{R}[(Y_{ij})_{(i,j) \in \{1,...,n\}^2}]$. Pour simplifier, le second sera noté $K[(Y_{ij})]$.
Pour $r \in \{1, ..., n\}$, on pose

$$\sigma_r(X_1, ..., X_r) = \sum_{i_1, .., i_r \text{ distincts}} \prod_{l=1}^r X_{i_l} \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$$

De sorte que $\prod_{i=1}^n (X - X_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^r \sigma_r(X_1, ..., X_n) X^r$.

De même, pour $r \in \{1, ..., n^2\}$, on pose

$$S_r((Y_{ij})) = \sum_{(i_1,j_1),..,(i_r,j_r) \text{ distincts}} \prod_{l=1}^{r} Y_{i_l,j_l}. \in \mathbb{R}[(Y_{ij})]$$

De sorte que $\prod_{i,j=1}^{n}(X - Y_{ij}) = \sum_{r=0}^{n^2}(-1)^r S_r((Y_{ij}))X^r$.

On a alors $G = \sum_{r=0}^{n^2}(-1)^r S_r((t_{ij}))X^r$, avec $S_r((t_{ij})) \in K$ pour tout $r \in \{0, ..., n^2\}$. On pose alors $T_r \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ tel que

$$T_r(X_1, ..., X_n) := S_r((X_i + X_j + cX_iX_j))$$

Du coup,

$$S_r((t_{ij})) = T_r(x_1, ..., x_n) \text{ et } G = \sum_{r=0}^{n^2}(-1)^r T_r(x_1, ..., x_n)X^r$$

Fixons $r \in \{0, ..., n^2\}$ et montrons que $T_r(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$. Comme dans la preuve de votre camarade, on prouve que

$$T_r(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = T_r(x_1, ..., x_n) \tag{1}$$

pour tout $\sigma \in S_n$. Ceci dit, T_r n'est pas nécessairement symétrique (en fait, il l'est, mais cela revient à faire ma preuve de la semaine dernière). Posons

$$\tilde{T}_r = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \sigma \cdot T_r$$

où pour tout $\sigma \in S_n$, on a défini

$$(\sigma \cdot T_r)(X_1, ..., X_n) = T_r(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}).$$

Et là, le bon point est que grâce à (1), on a

$$\tilde{T}_r(x_1, ..., x_n) = T_r(x_1, ..., x_n)$$

et que $\tilde{T}_r \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ est symétrique (cad $\sigma \cdot \tilde{T}_r = \tilde{T}_r$ pour tout $\sigma \in S_n$). Du coup, il existe $\tau_r \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ tel que $\tilde{T}_r = \tau_r(\sigma_1, ..., \sigma_n)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} T_r(x_1, ..., x_n) &= \tilde{T}_r(x_1, ..., x_n) \\ &= \tau_r(\sigma_1(x_1, ..., x_n), ..., \sigma_n(x_1, ..., x_n)) \\ &= \tau_r(-a_n, ..., (-1)^i a_{n-i}, ..., (-1)^n a_0) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où $F = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout i. Donc $T_r(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ et $G \in \mathbb{R}[X]$. Et c'est tout.

Conclusion: avec cette petite astuce de symétrisation, on rajoute peu de choses à la preuve initiale, et tout doit tenir en 15 minutes.

Ce qu'on attend d'un agrégatif: c'est (entre autre!) d'utiliser correctement les théorèmes cités!!!!! Utiliser un théorème sans vérifier ses hypothèses est fatal à l'oral (à l'écrit aussi). Que diriez-vous si, après avoir montré que les matrices de $M_n(L)$ sont trigonalisables lorsque L est algébriquement clos, j'en déduisais que les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont toutes trigonalisables??