Université de Nice-Sophia Antipolis
Département de Mathématiques
Préparation à l'agrégation extrene
Année 2007-2008
F.Robert

Développement: le lemme de Morse

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$. On suppose que

(i) $Df_a = 0$

(ii) la matrice Hessienne $(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a))_{ij}$ est non dégénérée de signature $(s, n-s)$, avec $s \in \{0, ..., n\}$.

On cherche à montrer le résultat suivant: il existe un ouvert U' de $\mathbb{R}^n$ tel que $a \in U' \subset U$, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in V$, un difféomorphisme $\varphi \in C^\infty(V, U')$ tel que $\varphi(0) = a$ et

$$f(\varphi(y)) - f(\varphi(0)) = \sum_{i=1}^{s} y_i^2 - \sum_{i=s+1}^{n} y_i^2$$

pour tout $y \in V$. La preuve de ce résultat est l'objet des six questions suivantes.

(a) Montrez qu'on peut supposer que U est convexe. On suppose dorénavant que U est convexe.

(b) Montrez qu'il existe des fonctions $g_1, ..., g_n \in C^\infty(U)$ telles que

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) g_i(x)$$

pour tout $x \in U$.

(c) Montrez qu'il existe des fonctions $h_{ij} \in C^\infty(U)$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ telles que

$$f(x) - f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - a_i)(x_j - a_j) h_{ij}(x)$$

pour tout $x \in U$.

(d) Montrez qu'on peut supposer que la matrice $h(x) := (h_{ij}(x))_{ij}$ est symétrique pour tout $x \in U$, et que

$$h(a) = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s} \end{pmatrix}.$$

(e) en utilisant la méthode de réduction de Gauss, montrez qu'il existe $U_1 \subset U$ ouvert tel que $a \in U_1$ et pour tout $x \in U_1$, il existe $P(x) \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $h(x) = P(x)^t h(a) P(x)$ et $P(a) = I_n$.

(f) Démontrez le résultat demandé.