Université de Nice-Sophia Antipolis
Agrégation de mathématiques
2007/2008
F.Robert

DÉVELOPPEMENT: ÉQUIVALENCE DES NORMES EN DIMENSION FINIE ET APPLICATIONS

On s'intéresse dans ce TD à la preuve et à quelques conséquences du résultat suivant:

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

1. Preuve du théorème

1.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrez qu'il existe une norme sur E.

1.2. Soit $(e_1, ..., e_n)$, $n \in \mathbb{N}$ une base de E. Soit

$$\begin{array}{llll} \varphi: & \mathbb{R}^n & \to & E \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array}$$

Montrez que φ est un isomorphisme.

1.3. Pour $x \in E$, on pose $N_\infty(x) := \|\varphi^{-1}(x)\|_\infty$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie sur $\mathbb{R}^n$. Montrez que N_∞ est une norme.

1.4. Soit N une norme sur E. Montrez qu'il existe $C > 0$ tel que $N(x) \leq C \cdot N_\infty(x)$ pour tout $x \in E$.

1.5. On note $S_{N_\infty}(0, 1)$ la sphère unité de E pour la norme N_∞: on la munit de la distance associée à N_∞. Montrez que l'application

$$\begin{array}{llll} f: & S_{N_\infty}(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & N(x) \end{array}$$

est continue.

1.6. En utilisant les propriétés des réels, montrez que $S_{N_\infty}(0, 1)$ est compact pour sa topologie définie ci-dessus.

1.7. Montrez qu'il existe $c > 0$ tel que $N(x) \geq cN_\infty(x)$ pour tout $x \in E$. En déduire que toutes les normes sur E sont équivalentes.

2. Quelques applications

2.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrez qu'il n'y a qu'une seule topologie d'espace normé sur E.

2.2. Soit (E, N) un evn de dimension finie. Montrez que les compacts de E sont exactement les fermés-bornés.

2.3. Soit (E, N) un evn. Soit F un sous-ev de dimension finie de E. Montrez que F est complet (muni de la topologie induite).

2.4. Soient E, F deux evn et soit $f : E \to F$ linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Montrez que f est continue.