Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 204, Année 2007-2008

Connexité. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

Le plan doit impérativement comprendre la définition (!), les propriétés de base, les connexes de $\mathbb{R}$, la définition des composantes connexes, de la notion de connexité par arc, les exemples sur les "grands" groupes (livre de Mneinmé-Testard, $SO_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{C}), GL_n^+(\mathbb{R}), GL_n^-(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R}), ...$ qui sont connexes par arcs), le théorème des valeurs intermédiaires, Darboux, Sunyer y Balaguer, $df = 0$ implique f =cste sur connexe, le prolongement analytique et les zéros isolés,....

A propos de l'exemple ultra-classique : si (u_n) est une suite d'un compact tel que $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence est un connexe. Une application à connaitre : la méthode de Jacobi (analyse numérique matriciel).

Ne pas faire une leçon très théorique sur la connexité avec peu d'exemples. Mieux vaut mettre seulement les résultats utiles et beaucoup d'exemples et d'applications.

A propos des exemples, on peut penser aussi au cube de Hilbert et la cage infini (Chambert-Loir).

Ne pas oublier les applications simples, comme par exemple que la connexité permet de voir que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

En plus de votre livre de topo préféré, utiliser les grands classiques (Pommellet, Gourdon,...)

Au niveau des contre-exemples : l'adhérence du graphe de $\sin(1/x)$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 1 (Quelques exemples)

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, et que $SO(n)$, $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

Exercice 2 (Exercices type Oral)

1) Montrer que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ est connexe.

2) Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue, alors f n'est pas injective. (Utiliser $g(z) = f(z) - f(-z)$.)

3) Théorème de passage des douanes : Dans E espace topologique, $A \subset E$, C connexe de E, $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$. Alors $C \cap \mathrm{Fr}A \neq \emptyset$.

4) Dans $\mathbb{R}^2$, donner les composantes connexes du sous-espace constitué de l'hyperbole $xy = 1$ et de ses asymptotes.