Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 201, Année 2007-2008

Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

Attention pour les exemples à n'oublier aucun des espaces "classiques" (continue sur compacte et ce qui va avec (C_0, C_c, ...), L^p, l^p, ...

Parler de *complétude*, de *densité*, de *dualité* sur ces espaces classiques, des extensions de construction (Int Riemann, Transformée de Fourier sur L^p,...) que cela donne.

Ne pas oublier les propriétés simples : limite simple de fonctions continues n'est pas forcément continue,...

Ascoli + ses applications (Arzela-Péano, Montel, Op. compacts et à Noyau,...)

On peut penser aussi aux propriétés de type Hilbertienne (bases hilbertiennes), série /transformée de Fourier (en particulier approx. fonctions périodiques.)

Entre aussi dans la leçon (si vous aimez) Banach-Steinhauss, Hahn-Banach, Stone-Weierstrass (abstrait).

On peut parler aussi des espaces de fonctions holomorphes (cf Chambert-Loir,...) des espaces de Sobolev (pour ceux qui aiment les EDP),...

Exercice 1 (Espaces de Hölder)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$. Soit $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^\infty(\Omega)$ pour lesquelles il existe $C > 0$ telles que

$$\forall x, y \in \Omega,\ |f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha.$$

On utilise sur cet espace la norme

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

1) Montrer que $C_b^1(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C_b^0(\Omega)$.

2) Trouver f continue telle que $f \notin C^{0,\alpha}$ pour tout α.

3) Montrer que $(C^{0,\alpha}, \|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

Exercice 2 (Exercices type Oral)

1) Est-ce que $C^\infty(\Omega)$ est métrisable ?

2) Pour Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on pose $H = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe ; $\int_\Omega |f|^2\,dz < +\infty\}$. On munit cet e.v. du produit scalaire $(f|g) = \int_\Omega f\overline{g}\,dz$. Montrer que ceci définit un espace de Hilbert. On pourra commencer par montrer que pour tout compact K inclu dans Ω, on a $\max_{z\in K} |f(z)| \le \dfrac{1}{d(K,\partial\Omega)\sqrt{\pi}}\|f\|$.

3) Complété de $C_c^\infty(\Omega)$ pour la norme $\int_\Omega |f|^2\,dx$?