Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 219, Année 2007-2008

Problèmes d'Extremum.

Remarques sur la leçon

On peut organiser la leçon selon la nature dont sont les issues les extremums (topologie, calcul différentiel, ...)
On peut se servir de l'introduction du Pommellet, chapitre sur les extremums pour débuter sa présentation orale.
Sur l'aspect topologique, on parlera de la continuité sur un compact, on donnera des applications (Rolle, point fixe, ...), on étudiera le cas où $\lim f = +\infty$ à l'infini et ses applications (d(a,A), polymômes d'approximation, d'Alembert-Gauss, applications en géométrie, ...). On parlera aussi de la projection sur un convexe et éventuellement de conséquences (Lax-Milgram, EDP).
Sur l'aspect calcul diff. et points critiques, on parlera des conditions d'ordre 1 et d'ordre 2. On donnera des applications (calculs sur des exemples, principe du maximum, ...)
A propos du théorème des extremas liés, on donnera des exemples calculatoires mais aussi des applications (inegalités de type convexité : Arithmético-géométrique, géométrie : maximalité du périmètre d'un triangle ou d'un quadrilatère , ...)
On peut parler aussi de convexité (Pommellet), d'optimisation (Ciarlet), de fonctions harmoniques, de principe du maximum sur les EDP (Zuily-Queffélec) ...

Les développements possibles sont : Extremas liés + application à la diagonalisation, condition d'ordre 2 + une application (par exemple le principe du maximum, cf Gourdon), plusieurs résultats liés à la topologie, le théorème de projection, les extremums et la convexité, ...

La bibliographie proposée pour la leçon est :

- Brézis
- Chambert-Loir , Fermigier
- Gourdon
- Leichtman, Schauer, Exercices X, ENS, tome 4
- Pommellet
- Rouvière

Exercices type oral

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points où f atteint des extremas locaux stricts ?

2) Déterminer $\max_{|z|\leq 1} |\sin z|$ en commençant par prouver que ce max est atteint sur le cercle unité.

3) On pose $D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 9\}$. Etudier les extremums de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$ sur D.

Exercice (Un calcul)

On cherche à calculer le minimum de la fonction $f(x, y, z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 + xt^2 + yt + z)^2\, dt$.

On définit le produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)\, dt$ sur $E = \mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que le minimum est atteint en un unique point (a, b, c) tel que $P_0(X) = a\,X^2 + b\,X + c$ vérifie $\|P_0 + X^3\| = \inf_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} f(x, y, z)$ et que ce point est le projeté orthogonal de $-X^3$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Calculer le projeté orthogonal (on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\, dt = n!$) et conclure.