Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 206, Année 2007-2008

Théorèmes de points fixes. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

Le titre redevient "Théorème de ...", donc il faut mettre les énoncés ! On peut donc plus facilement mettre les théorèmes avec les propriétés de $\mathbb{R}$, sur un compact ,...

Ne pas oublier de mettre des exemples "concrets".

Parler de toutes les applications du théorème de point fixe contractant dans un complet : suites récurrentes, méthode de Newton (+ un exemple au moins !!!), inversion locale, Cauchy-Lipschitz (au moins global), Equations intégrales (Cf Rouvière), Stampacchia et Lax-Milgram.

A propos de Stampacchia et Lax-Milgram, si on en parle, il faut savoir l'appliquer à des cas simples de problèmes de Dirichlet (Cf Brézis).

Les autres possibilités de théorèmes de points fixes à mettre sont : le théorème de Brouwer, de Schauder et éventuellement celui de Kakutani.

Les applications de Brouwer : champ rentrant sur la sphère (Chambert-Loir 1), Th des 3 fermés (Pommellet non corrigé, cf exo 2), Th de Perron-Frobenius (Serre, Matrices) et Schauder !

Au moins une application de Schauder : Cauchy-Peano.

Si on parle de Kakutani, il faut avoir l'application : mesure de Haar sur un groupe topologique compact et commutatif.

On peut mettre aussi dans la leçon les sous-groupes compacts de Gl_n et le théorème de Von Neumann.

Exercice 1 (Exercice de type oral)

Soit (E, d) un espace métrique compact, $f : E \to E$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tout $s, y \in E$. Soit $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (Théorème des trois fermés)

1) Soit (E, d) un espace métrique, $A \subset E$. Alors $x \to d(x, A)$ est continue sur E.

2) Soit Δ un triangle de $\mathbb{R}^2$, cad l'enveloppe convexe de 3 points non alignés a, b, c. Si $\Delta = F_a \cup F_b \cup F_c$ réunion de trois fermés avec $[a, b] \subset F_a$, $[b, c] \subset F_b$, $[c, a] \subset F_c$. Alors $F_a \cap F_b \cap F_c \neq \emptyset$.

Indication : Poser $\varphi(h) = \dfrac{a\, d(h, F_a) + b\, d(h, F_b) + c\, d(h, Fc)}{d(h, F_a) + d(h, F_b) + d(h, Fc)}$ et appliquer Brouwer.

Exercice 3 (Théorème de Perron-Frobénius, forme faible)

On va montrer que :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$une matrice positive. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A associé à un vecteur propre positif.

Pour cela, appliquer Brouwer avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \sum x_i = 1,\, x \geq 0, Ax \geq \rho(A)x\}$ et $f(x) = \dfrac{1}{\|Ax\|_1} Ax$. (On commencera par traiter le cas où il existe $x \in C$ tel que $Ax = 0$.)