Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 229, Année 2007-2008

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Remarques sur la leçon

Un enchainement assez classique : Définitions($\sum$, S_n, R_n, CV, DV), exemples (géom, $\sum 1/n$). Séries à termes positifs (CVA (avec Cauchy), S_n majorées, Cauchy, d'Alembert, Raabe-Duhamel, th avec $\leq$, o, O, $\sim$) . Alternées (CSA, Abel), Groupement, convolution. Puis sommation des relations de comparaison et comparaison série-intégrale qui permettent en particulier d'avoir le comportement des restes et sommes partielles.

Et mettre des exemples !!!

Pour les développements, on peut proposer (Comparaison $\sum \int$ + série harmonique), (Inégalité de Carlemann) et (Stirling et équivalent de suites. Cet exemple utilise la sommation des relations de comparaison donc à placer au bon niveau dans le plan). Le théorème de Cauchy-Mertens peut aussi servir de développement.

Penser aux exemples classiques : développement asymptotique de $\sum \frac{1}{n}$, de $u_{n+1} = \sin u_n$ (via la comparaison des restes de la série en $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$, ou avec l'exemple $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$),...

En plus des deux techniques indispensables (sommation des relations de comparaison et comparaison série-intégrale) pour avoir des comportement des restes et sommes partielles, on peut étudier les exemples suivants :

Pour $f > 0$ et de classe C^1 telle que $f'/f \underset{+\infty}{\to} p \neq 0$, alors

pour $p \in]0, +\infty[$, $\sum f(n)$ diverge et $\sum_0^n f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{e^p - 1} \int_0^{n+1} f$,

pour $p \in]-\infty, 0[$, $\sum f(n)$ converge et $\sum_n^\infty f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{e^p - 1} \int_n^{+\infty} f$,

pour $p = -\infty$, $\sum f(n)$ converge et $\sum_n^\infty f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$. (Moisan-Vernotte + Gourdon).

Soit $u_n > 0$. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, si de plus $u_n = o(S_n)$, on peut donner un équivalent des restes ou sommes partielles. Si $\sum u_n$ converge, alors on a des résultats semblables sur $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$.

On peut parler aussi de théorème de type taubérien, par exemple si $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ et $\Sigma_n = (S_1 + \cdots + S_n)/n$, si (Σ_n) converge et si $|u_n| \leq M/n$, alors $\sum u_n$ converge. (cf Chambert-Loir par exemple).

Bibliographie : Gourdon, Ramis, Chambert-Loir, Combes + Un livre d'exercices

Exercices de type Oral

1) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n^2 + \frac{2}{n^3}} - \sqrt[3]{n^3 + \frac{3}{n^2}} \right)$.

2) Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$.

3) On pose $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^\alpha} \sum_{n=1}^{n} (\ln k)^2$. Nature de $\sum u_n$?

4) On pose $u_n = \displaystyle\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ a une limite. La calculer.

5) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$?