Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 243, Année 2007-2008

Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

On commencera par situer la leçon comme faisant suite à un cours sur les séries de fonctions et donc on admettra comme prérequis tout ce qui concerne cette notion. On prendra aussi comme prérequis la $\mathbb{C}$-dérivabilité.
Rappel : la $\mathbb{C}$-dérivabilité peut-être vue comme la $\mathbb{C}$-différentiabilité ou bien comme l'existence de la limite dans $\mathbb{C}$ de $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ quand $z \to z_0$.
Le début de la leçon est assez classique et on peut suivre un plan du style :
I) 1) définition d'une série entière, Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence, ex de $\sum z^n$.
2) propriétés algébriques (somme, produit), critère de d'Alembert, de Cauchy, ex $\sum n^\alpha z^n$, $\sum z^n/n!$, $\sum n!z^n$ (ce qui donne des rayons de CV variés).
II) continuité, dérivabilité et intégrabilité.
Ensuite, c'est un peu plus souple et cela dépend des goûts, en particulier pour les applications. Néanmoins, il faut parler du développement en série entière d'une fonction et des applications suivantes :

A1 : résolution d'équations différentielles.
A2 : calcul de sommes, d'intégrales ou de suites.
A3 : nombre de solutions d'une équation diophantienne.

Il est bien de considérer le comportement au bord du disque de convergence, en particulier via le théorème d'Abel ou tout au moins le cas où $\sum a_n R^n$ converge.
On peut également parler (pour ceux qui aiment, mais attention à ne trop en faire et de changer de leçon) d'holomorphie. Une dose maximale raisonable est de parler du principe des zéros isolés, de la formule de Cauchy et de ses conséquences (Th. de Liouville).

Penser aussi à l'exponentielle complexe !

Un problème très fréquent des plans est de manquer de <u>vrais applications</u>, c'est-à-dire des applications qui ne sont pas sur les séries entières. Il faut entendre "applications" comme la question suivante : qu'apporte les séries entières aux autres domaines des mathématiques. Eviter que les leçons contiennent trop de résultats anecdotiques d'un point de vue théoriques et pas assez d'applications. D'une façon générale, les leçons sont souvent <u>pauvres en exemples</u>. Par exemple, dans la partie sur la dérivation, intégration des séries entières, on devrait mentionner qu'à partir de l'égalité $\sum z^n = 1/(1-z)$ on en obtient beaucoup d'autres...

La bibliographie pour la leçon est (en plus des indispensables Gourdon et Pommellet !) :

- Chambert-Loir , Fermigier, Maillot, Analyse 1
- Leichtnam, Schauer, Exercices X, ENS, tomes 3 et 4
- Précis, Analyse-Géométrie, tome 7
- Ramis, Odoux, Deschamps, tome 4
- Ramis, Odoux, Deschamps, exercices analyse tome 2
- Rudin, analyse réelle et complexe
- Zuily, Queffélec
- + un livre d'exercices pour fournir d'autres exemples

Exercices de type oral

1) Calculer le rayon de la série entière $\sum e^{n\sin n} z^n$.

2) Déterminer le rayon de $\sum a_n z^n$ où a_n est la nième décimale de π.

3) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$. Déterminer le rayon de $\sum u_n z^n$.

3) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. Quel est le rayon de $\sum a_n^2 z^n$?

4) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5) Déterminer le développement en série entière de Arcsin$x$.

6) Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ avec $a_n \in \{-1, 1\}$, $f(0) = 1$, $|f^{(p)}(x)| \leq 1$ pour tout $x \geq 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(x) = e^{-x}$.